FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

CZY ISTNIEJE METAL GEISTA ?

Czytelnicy *Lalki* Bolesława Prusa pamiętają zapewne, że w trakcie pobytu Wokulskiego w Paryżu odwiedził go wynalazca o nazwisku Geist i pokazał mu "stal lekką jak płatek bibułki". W dalszej części książki jest mowa o tym, że ów metal jest trzy, a nawet pięć razy lżejszy od wody; dyskutowane są również nadzieje na otrzymanie metalu lżejszego od powietrza. Czy wizja artystyczna Prusa może przypadkiem być bliska prawdy? Pewne światło na ten problem rzucają nowe, bardzo precyzyjne badania kryształów wodoru przeprowadzone w 1987 roku w Carnegie Institution w Waszyngtonie. Wodór, jak wiadomo, najlżejszy spośród pierwiastków, jest bowiem najlepszym kandydatem na "metal Geista". Ponieważ w warunkach normalnych wodór jest gazem, więc badania kryształów wodoru wymagają bardzo niskich temperatur lub bardzo wysokich ciśnień. We wspomnianym eksperymencie użyto kowadeł diamentowych (Nowinki z VIII 1987). Wodór zamarza w temperaturze pokojowej przy ciśnieniu około 5,4 GPa. Otrzymane kryształki o objętości wyjściowej około 10 nl (nanolitrów) badane były za pomocą synchrotronowych promieni rentgena. Mimo szybkiego zmniejszania się pod ciśnieniem wielkości kryształów udało się po raz pierwszy przeprowadzić pomiary w funkcji ciśnienia (aż do 26,5 GPa) i wyznaczyć strukturę krystaliczną oraz równanie stanu wodoru. Wodór w tym zakresie ciśnień jest izolatorem i tworzy kryształy molekularne o strukturze heksagonalnej gęstego upakowania. Dla małych ciśnień parametry sieci są bardzo bliskie idealnej struktury heksagonalnej. Ze wzrostem ciśnienia pojawia się anizotropia rzędu jednego procenta na 10 GPa. Gęstość kryształów wodoru przy ciśnieniu 5,4 GPa wynosi 0,25 g/cm³ i wzrasta szybko z ciśnieniem osiągając przy 26,5 GPa wartość 0,42 g/cm³. Badania prowadzone przy wyższych ciśnieniach pozwoliły stwierdzić brak przejścia fazowego wodoru do innej struktury krystalicznej co najmniej do około 150 GPa. Natomiast otrzymane równanie stanu pozwala na przewidywanie przejścia w stan metaliczny przy ciśnieniu nie mnieszym niż 230 GPa. Zdaniem teoretyków metaliczny wodór może być metatrwały, tzn. będzie mógł istnieć przy ciśnieniu normalnym w temperaturze pokojowej (podobnie jak diament) i będzie mieć gęstość około 0,5 g/cm³. Warto dodać, że właśnie obecnością metalicznego wodoru we wnętrzu Jowisza próbuje się wyjaśnić istnienie silnego pola magnetycznego wokół tej planety. (Ciśnienie w środku Jowisza wynosi około 30 TPa.) Możemy więc stwierdzić ostatecznie, iż piękna wizja literacka Prusa jest, być może, bliska częściowego potwierdzenia. Wprawdzie metaliczny wodór będzie zapewne bardzo miękki, jednakże wiara Prusa w potęgę umysłu ludzkiego jest godna podkreślenia. Postęp współczesnej technologii jest rzeczywiście w bardzo dużej mierze związany z nowymi materiałami.

Szeregi zbieżne warunkowo

Dr Zbigniew SAWOŃ

Z zaciekawieniem przeczytałem artykuł dr. Z. Marciniaka *Czy geometrzy znają wszystkie grupy* zamieszczony w *Delcie* 8/1987. Zawiera on agitację algebraika i geometry, mającą zachęcić Czytelnika do zapoznania się z grupą S_∞ tzw. „leniwych permutacji” zbioru liczb naturalnych $\mathbf{N}$, którą zwykło oznaczać się symbolem $P(\mathbf{N})$. Chciałbym i ja – „facet” od analizy – zaagitować za inną podgrupą grupy $P(\mathbf{N})$.

Sumę skończonej liczby składników można obliczać w dowolnej kolejności, wynik będzie ten sam. Inaczej jest przy nieskończonej liczbie składników. Weźmy na przykład szereg

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\ldots,$$

w którym wyraz $\frac{1}{2^n}$ występuje 2^n razy na zmianę ze znakiem + i −. Suma takiego szeregu równa jest 0. Jeśli jednak przestawimy wyrazy tego szeregu

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$$

tak, by po dwóch wyrazach $\frac{1}{2^n}$ ze znakiem + wystąpił jeden wyraz $\frac{1}{2^{n-1}}$ ze znakiem −, to suma będzie równa $\frac{1}{2}$.

Riemann udowodnił, że jeśli szereg $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ o wyrazach rzeczywistych jest zbieżny, ale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| = \infty$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej a można tak przestawić jego wyrazy, tzn. znaleźć taką permutację σ zbioru liczb naturalnych, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = a$. Co więcej, można znaleźć taką permutację σ, że $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest rozbieżny.

Z drugiej strony, jeśli σ jest permutacją „leniwą”, czyli przestawiającą tylko skończenie wiele liczb naturalnych, to, oczywiście, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$. Powstaje pytanie:
Jak opisać permutacje $\sigma : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ o własności:
jeśli $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny,

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$?

Własność ta nazywa się własnością Borela.

Łatwo zauważyć, że zbiór B permutacji o własności Borela jest grupą zawierającą S_∞ – grupę permutacji leniwych. Do B należą też inne permutacje, np. taka: $\rho(2k) = 2k-1$, $\rho(2k-1) = 2k$ dla $k = 1, 2, \ldots$ Oczywiście $\rho \notin S_\infty$ i $\rho \in B$. Dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ mamy bowiem

$$\sum_{n=1}^{2k} a_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{2k} a_n \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{2k-1} a_{\rho(n)} = \sum_{n=1}^{2k-1} a_n + a_{2k} - a_{2k-1},$$

a więc $\lim\limits_{k\to 0} \left| \sum\limits_{n=1}^{k} a_{\rho(n)} - \sum\limits_{n=1}^{k} a_n \right| = 0$. Tak samo można wykazać, że jeśli σ jest taką permutacją, że dla pewnego $N \in \mathbf{N}$ i dla dowolnego $n \in \mathbf{N}$ mamy $|\sigma(n) - n| \le N$, to $\sigma \in B$. Ale znów nie są to wszystkie permutacje z grupy B. Na przykład permutacja τ dana wzorem $\tau(2^{2k}) = 2^{2k-1}$, $\tau(2^{2k-1}) = 2^{2k}$ dla $k = 1, 2, \ldots$ oraz $\tau(n) = n$ dla pozostałych liczb naturalnych, też należy do B, a nie ma podanej poprzednio własności.

Dla każdej permutacji σ zbioru liczb naturalnych zbiór $\{\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)\}$ można zapisać jako sumę przedziałów $[n_i, n_{i+1}]$ (gdzie $[n, m] = \{k \in \mathbf{N} : \ n \le k \le m\}$). Najprostszy taki rozkład to

$$\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\} = [\sigma(1), \sigma(1)] \cup \ldots \cup [\sigma(n), \sigma(n)].$$

Na ogół można podać różne rozkłady tego zbioru. Oznaczmy przez $\Delta_n(\sigma)$ **najmniejszą** liczbę przedziałów, na jakie można rozłożyć zbiór $\{\sigma(1), \ldots, \sigma(n)\}$. Łatwo sprawdzić, że np. $\Delta_1(\rho) = 1$, $\Delta_{2k}(\rho) = 1$, $\Delta_{2k+1}(\rho) = 2$ dla $k \ge 1$.

Borel udowodnił następującą charakteryzację permutacji z grupy B: $\sigma \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka stała $M > 0$, że $\Delta_n(\sigma) \le M$ dla $n = 1, 2, \ldots$

Naszkicuję teraz dowód powyższego twierdzenia, korzystając z Teorii Limesowalności. Niech σ będzie permutacją zbioru $\mathbf{N}$, a $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szeregiem zbieżnym. Oznaczmy:

$$\mathcal{E}_k^n = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k = \sigma(i) \text{ dla pewnego } i = 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{dla pozostałych } k,\ n. \end{cases}$$

oraz $S_n^\sigma(x) = a_{\sigma(1)} + \ldots + a_{\sigma(n)}$.

Mamy wtedy $S_n^\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{E}_k^n a_k$. Dla sumy tej stosujemy przekształcenie Abela i otrzymujemy $S_n^\sigma(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) \cdot (a_1 + \ldots + a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) s_k$, gdzie $s_k = a_1 + \ldots + a_k$. (Pamiętajmy, że wszystkie powyższe sumy są tak naprawdę skończone.)

Przekształceniem Abela nazywamy wzór

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n =$$
$$= (a_1 - a_2) b_1 + (a_2 - a_3)(b_1 + b_2) + \ldots + (a_{n-1} - a_n)(b_1 + \ldots + b_{n-1}) + a_n (b_1 + \ldots + b_n).$$

Jeśli przyjmiemy $0 = a_{n+1} = b_{n+1} = a_{n+2} = b_{n+2} = \ldots$, to powyższy wzór możemy zapisać jako

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k - a_{k+1})(b_1 + \ldots + b_k).$$

Permutacja σ należy do B wtedy i tylko wtedy, gdy

(*) dla każdego ciągu zbieżnego $(s_k)_{k=1}^{\infty}$ odpowiadający mu ciąg $\left(S_n^\sigma\right)_{n=1}^{\infty}$ jest też zbieżny i w dodatku ma tę samą granicę.

Ci Czytelnicy, którzy pamiętają mój artykuł o macierzach Toeplitza (*Delta* 8/1986), znają warunek równoważny warunkowi (*) (patrz obok). W naszym przypadku mamy

$$(**) \qquad \begin{gathered} \lim_{k \to \infty} \mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n = 0 \quad \text{dla} \quad n = 1, 2, \ldots \\ \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} (\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n) = 1. \end{gathered}$$

Tak więc $\sigma \in B$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje taka liczba $M > 0$, że $\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n| \le M$. Ale łatwo sprawdzić, że

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\mathcal{E}_k^n - \mathcal{E}_{k+1}^n| \le 2\,\Delta_n(\sigma),$$

co kończy dowód twierdzenia Borela.

Niech $A = (a_{n,k})_{n,k=1,2,\ldots}$ będzie macierzą nieskończoną. Mówimy, że A wyznacza metodę Toeplitza zachowującą zbieżność, jeżeli:
dla każdego zbieżnego ciągu $x = (s_k)_{k=1}^{\infty}$ i dla każdego n zbieżny jest szereg $\sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} s_k = A_n(x)$ i istnieje $\lim_{n \to \infty} A_n(x) = A(x)$.
Mamy twierdzenie.
Następujące warunki są równoważne
(i) A wyznacza metodę zachowującą zbieżność,
(ii) dla $k = 1, 2, \ldots$ istnieje $\lim_{n \to \infty} a_{n,k} = \alpha_k$ i istnieje $\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = \alpha$ oraz istnieje taka liczba $M > 0$, że $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \le M$ dla $n = 1, 2, \ldots$
Wtedy ponadto

$$A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k s_k + \alpha \lim_{n \to \infty} s_n.$$

Zauważmy jeszcze, że tak naprawdę z uwagi na warunek (**) udowodniliśmy nieco mocniejsze twierdzenie. Wykazaliśmy mianowicie, że jeśli dla dowolnego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ jest zbieżny, to dla każdego szeregu zbieżnego $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zachodzi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Rozwiązanie zadania F 256. Prawo Hooke'a dla sprężystych odkształceń objętości wyraża się wzorem

$$\Delta p = -k \frac{\Delta V}{V_0},$$

gdzie $\Delta p = p - p_0$ jest zmianą ciśnienia, $\Delta V = V - V_0$ zmianą objętości wywołaną zmianą ciśnienia Δp. k jest modułem ściśliwości. Moduł ściśliwości, zwany inaczej modułem sprężystości objętościowej, określa stosunek przyrostu ciśnienia wywieranego na ciało do względnej zmiany objętości wywołanej taką zmianą ciśnienia.
Z określenia gęstości $\rho = m/V$ wynika, że

$$\Delta \rho = -\frac{m}{V^2} \Delta V = -\rho \frac{\Delta V}{V}.$$

Z obu powyższych równań otrzymujemy

$$\frac{k}{\rho} = \frac{\Delta p}{\Delta \rho}.$$

Stąd otrzymujemy poszukiwane wyrażenie prędkości fali podłużnej przez ciśnienie i gęstość

$$v = \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}.$$

Rozwiązanie zadania M 524. Wystarczy zauważyć, że $\left[\frac{n}{p}\right]$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ dzieli się przez p, a z nich $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ dzieli się przez p^2, i ogólnie $\left[\frac{n}{p^j}\right]$ dzieli się przez p^j.

Rozwiązanie zadania F 257. Wstawiając do równania adiabaty $pV^\kappa = \mathrm{const}$ oraz $V = m/\rho$ otrzymujemy

$$p = C\rho^\kappa,$$

gdzie stała C zawiera poprzednią stałą oraz masę m. Na podstawie powyższego równania obliczymy zmianę ciśnienia Δp

$$\Delta p = C\kappa\rho^{\kappa-1}\Delta\rho = \kappa C\rho^\kappa \frac{\Delta\rho}{\rho} = \kappa p \frac{\Delta\rho}{\rho}.$$

Stąd otrzymujemy, że

$$\frac{\Delta p}{\Delta \rho} = \frac{\kappa p}{\rho}.$$

Wykorzystując wynik poprzedniego zadania oraz powyższe równanie znajdujemy wyrażenie na prędkość fal sprężystych w atmosferze

$$v = \sqrt{\frac{\kappa p}{\rho}}.$$

Daje to prędkość w powietrzu równą 332 m/s.