O funkcjach różniczkowalnych i hipotezie continuum

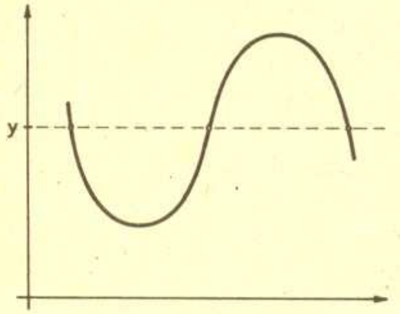
Dr Piotr
ZAKRZEWSKI

Zobacz artykuł *O równoliczności zbiorów*, *Delta* 11(155)/1986.

Pierwszą funkcję przekształcającą prostą rzeczywistą $\mathbf{R}$ na całą płaszczyznę skonstruował przed ponad stu laty Georg Cantor. Od tego czasu własności takich funkcji przyciągały uwagę wielu matematyków. Funkcja rzeczywista f o wartościach w płaszczyźnie może być w naturalny sposób utożsamiona z uporządkowaną parą funkcji $\langle f_1, f_2 \rangle$, jej współrzędnych, przyjmujących wartości rzeczywiste. Można więc mówić o ciągłości, różniczkowalności etc. funkcji f rozumiejąc przez to posiadanie tych własności przez obie jej współrzędne. Wiadomo więc na przykład, że odwzorowanie prostej na płaszczyznę może być ciągłe, ale nie może być różniczkowalne.

Mamy tu na myśli system Zermelo i Fraenkla z aksjomatem wyboru (w skrócie ZFC).

W tym artykule zajmiemy się pytaniem następującym – czy istnieje funkcja przekształcająca prostą na płaszczyznę, taka, że w każdym punkcie co najmniej jedna z jej współrzędnych jest różniczkowalna ? Problem sformułowany jest w języku analizy i od analizy można by oczekiwać jego rozwiązania. Rzeczywistość jest jednak inna: odpowiedzi na nasze pytanie nie daje nie tylko analiza, ale cała w ogóle matematyka oparta na przyjętym powszechnie za jej podstawę systemie aksjomatów teorii mnogości. Michał Morayne, młody matematyk wrocławski, udowodnił bowiem kilka lat temu, że istnienie szukanej przez nas funkcji jest równoważne słynnej hipotezie continuum ! Sformułowana przez Cantora hipoteza continuum głosi, że każdy nieskończony podzbiór prostej jest bądź przeliczalny, bądź ma moc continuum. Wyniki Kurta Gödla (1940) i Paula J. Cohena (1963) pokazujące odpowiednio, że hipotezy continuum nie da się ani obalić, ani udowodnić w teorii mnogości, należą do największych osiągnięć matematyki XX wieku.



Zbiór tych punktów y osi OY, dla których prosta przechodząca przez y i równoległa do osi OX przecina wykres funkcji f w „niewielu" punktach, jest „duży", o ile f jest różniczkowalna.

Co ma jednak wspólnego hipoteza continuum z funkcjami różniczkowalnymi ? Punktem wyjścia do odpowiedzi na to pytanie jest następujące twierdzenie pochodzące od Stefana Banacha:

Jeśli funkcja $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ jest różniczkowalna na zbiorze $A \subset \mathbf{R}$, to zbiór wszystkich liczb y, dla których w zbiorze A istnieje co najwyżej przeliczalnie (tj. skończenie lub przeliczalnie) wiele takich x, że $f(x) = y$, ma moc continuum.

Powyższe twierdzenie pozwala na ujawnienie teoriomnogościowego charakteru rozważanego przez nas zagadnienia. Niech bowiem $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ będzie funkcją przekształcającą prostą na płaszczyznę i taką, że dla każdej liczby x istnieje $f_1'(x)$ lub $f_2'(x)$. Oznaczmy przez D_i dla $i = 1, 2$ zbiór punktów różniczkowalności funkcji f_i, a przez C_i zbiór wszystkich $y \in \mathbf{R}$, dla których istnieje co najwyżej przeliczalnie wiele takich $x \in D_i$, że $f_i(x) = y$. Skupmy naszą uwagę na zbiorze $T = C_1 \times C_2$. Ponieważ funkcja f jest „na", to każdy element ze zbioru T jest postaci $f(x)$ dla pewnego $x \in \mathbf{R}$. Jednocześnie wiemy, że $\mathbf{R} = D_1 \cup D_2$. Jeśli więc przez A_i' dla $i = 1, 2$ oznaczymy zbiór wszystkich $t \in T$, takich, że $t = f(x)$ dla pewnego $x \in D_i$, to będziemy mogli napisać, że $T = A_1' \cup A_2'$. Weźmy teraz dowolną liczbę x_0 i zapytajmy, ile jest w A_1' punktów o odciętej x_0. Otóż, jeśli $\langle x_0, y \rangle$ jest jednym z nich, to z definicji zbioru A_1' wynika, że istnieje liczba $z \in D_1$ taka, że $x_0 = f_1(z)$ i $y = f_2(z)$. Takich liczb z może być jednak co najwyżej przeliczalnie wiele, bo $x_0 \in C_1$. Tym bardziej więc zbiór wszystkich punktów postaci $f(z)$ jest co najwyżej przeliczalny. W analogiczny sposób można pokazać, że w zbiorze A_2' jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów o ustalonej rzędnej y_0. Zauważmy wreszcie, że na mocy cytowanego twierdzenia Banacha zbiory C_1 i C_2 mają moc continuum. Istnieją więc różnowartościowe funkcje h_1 i h_2 przekształcające zbiory C_1 i C_2, odpowiednio, na $\mathbf{R}$. Funkcja $h = \langle h_1, h_2 \rangle$ odwzorowuje wówczas wzajemnie jednoznacznie zbiór T na całą płaszczyznę, przy czym zbiory A_1' i A_2' przechodzą na pewne zbiory A_1 i A_2. Zbiory te odgrywają, jak łatwo sprawdzić, taką rolę na płaszczyźnie, jaką zbiory A_1' i A_2' w zbiorze T. Mianowicie:

Funkcja przyporządkowuje każdemu elementowi dziedziny dokładnie jeden element zbioru wartości. Intuicyjnie jest więc jasne, że zbiór wartości nie może mieć mocy większej niż zbiór argumentów.

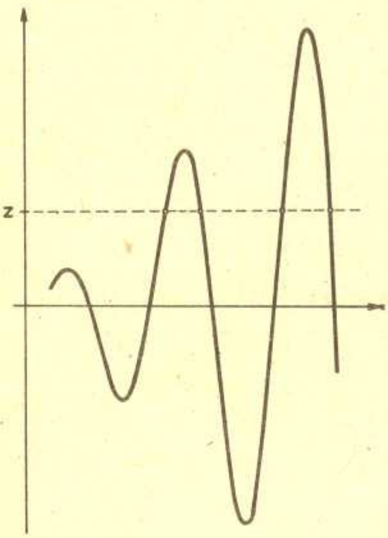
(i) płaszczyzna jest sumą zbiorów A_1 i A_2,

(ii) na każdej prostej pionowej jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów ze zbioru A_1, a na każdej prostej poziomej jest co najwyżej przeliczalnie wiele punktów ze zbioru A_2.

I tu dochodzimy do sedna: istnienie rozkładu płaszczyzny na dwa zbiory o powyższych własnościach jest, jak pokazał Wacław Sierpiński, równoważne hipotezie continuum !

Powróćmy do twierdzenia Moraynego. Naszkicujemy tu dowód wynikania w jedną stronę. Przypuśćmy mianowicie, że hipoteza continuum jest fałszywa. Istnieje wówczas nieprzeliczalny podzbiór X osi odciętych nierównoliczny ze zbiorem $\mathbf{R}$, tj. mający od niego „mniej" elementów. Utwórzmy podzbiór Z płaszczyzny złożony ze wszystkich punktów leżących na pionowych prostych przechodzących przez zbiór X.

Zastanówmy się, jaka jest moc zbioru $Z \cap A_1$. Ponieważ przecięcie każdej prostej pionowej ze zbiorem A_1 jest co najwyżej przeliczalne, więc zbiór $Z \cap A_1$ jest sumą mniej niż continuum zbiorów co najwyżej przeliczalnych. Można dowieść, że suma taka nie może mieć mocy continuum. Zrzutujmy teraz zbiór $Z \cap A_1$ na oś rzędnych. Rzut ten tym bardziej nie może mieć mieć mocy continuum (dlaczego ?) i w szczególności na osi rzędnych istnieje liczba y, która do niego nie należy. Wynika stąd, że prosta pozioma L przechodząca przez y jest rozłączna ze zbiorem $Z \cap A_1$. Prosta L przecina więc zbiór Z wyłącznie w punktach należących do zbioru A_2. Z konstrukcji wynika jednak, że zbiór punktów przecięcia dowolnej prostej poziomej ze zbiorem Z jest równoliczny z X, a więc nieprzeliczalny. Otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, że przecięcie zbioru A_2 z każdą prostą poziomą jest co najwyżej przeliczalne.



Zakończyliśmy tym samym szkic dowodu pierwszej części twierdzenia Moraynego, czyli wykazaliśmy, że istnienie szukanej funkcji implikuje hipotezę continuum. Dowód implikacji przeciwnej wykorzystuje drugą, pozostawioną przez nas bez dowodu część cytowanego wyniku Sierpińskiego, że hipoteza continuum pociąga za sobą istnienie podzbiorów A_1 i A_2 płaszczyzny o własnościach (i) i (ii). Pokażemy zatem, jak za ich pomocą zdefiniować odpowiednią funkcję. Kładziemy najpierw:

$$f_1(x) = x \cdot \sin x \quad \text{dla} \quad x \in (-1, \infty), \qquad f_2(x) = x \cdot \sin x \quad \text{dla} \quad x \in (-\infty, 1),$$

gdzie f_1, f_2 mają być współrzędnymi definiowanej funkcji f. Dzięki takiemu określeniu w każdym punkcie co najmniej jedna z nich będzie różniczkowalna. Aby zbiorem wartości funkcji f była cała płaszczyzna, wystarczy zapewnić, by przekształcała ona przedział $[1, +\infty)$ na zbiór A_1, a przedział $(-\infty, -1]$ na zbiór A_2. Pokażemy, jak zrealizować pierwszy z tych celów, w przypadku drugiego postępowanie jest analogiczne. Weźmy więc dowolną liczbę z i niech X_z będzie zbiorem składającym się ze wszystkich liczb x z przedziału $[1, \infty)$, dla których $x \cdot \sin x = z$. Łatwo zauważyć, że X_z jest zbiorem przeliczalnym. Można go zatem przekształcić na co najwyżej przeliczalny z założenia zbiór wszystkich punktów ze zbioru A_1 o odciętej z. Określmy więc funkcję f_2 na zbiorze X_z tak, by to właśnie robiła. Sprawdzenie, że postępując w ten sposób dla wszystkich liczb z, zdefiniujemy poprawnie funkcję f_2 na całym przedziale $[1, \infty)$, oraz że funkcja $f = \langle f_1, f_2 \rangle$ przekształci ten przedział na zbiór A_1, pozostawiamy Czytelnikowi.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 523. Niech A będzie najmniejszym zbiorem zawierającym liczby postaci $1 + 2^{-n}$ dla $n = 1, 2, \ldots$ i zamkniętym ze względu na dodawanie. Udowodnić, że granica ciągu liczb z A musi być dwójkowo-wymierna (czyli jest postaci $k \cdot 2^{-n}$, gdzie k, n są całkowite nieujemne).
Rozwiązanie na str. 1

M 524. Niech p będzie liczbą pierwszą. Przypuśćmy, że $n!$ dzieli się przez p^k, ale nie dzieli się przez p^{k+1}. Udowodnić, że

$$k = \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^j} \right].$$

Rozwiązanie na str. 11

M 525. Niech a, b, n będą naturalne. Przypuśćmy, że $a^n - b^n$ dzieli się przez n. Udowodnić, że $(a^n - b^n)/(a - b)$ również dzieli się przez n.
Rozwiązanie na str. 15

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 256. Prędkość rozchodzenia się sprężystych fal podłużnych wynosi $\sqrt{\frac{k}{\rho}}$, gdzie k nosi nazwę modułu ściśliwości, a ρ jest gęstością ośrodka. Na podstawie prawa Hooke'a dla sprężystych odkształceń objętościowych wykazać, że prędkość rozchodzenia się fali podłużnej można określić również jako $\sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}$, gdzie Δp i $\Delta \rho$ oznaczają zmianę ciśnienia i gęstości.
Rozwiązanie na str. 11

F 257. Na podstawie wyników poprzedniego zadania obliczyć prędkość rozchodzenia się fal podłużnych w atmosferze w warunkach normalnych. Zakładamy, że proces rozchodzenia się fali akustycznej w atmosferze jest procesem adiabatycznym, tj. zależność ciśnienia gazu od jego objętości wyraża się wzorem $pV^{\kappa} = \text{const}$; dla powietrza w warunkach normalnych $\kappa = 1{,}40$.
Rozwiązanie na str. 11