

Numeryczna droga do solitonów

Dr hab. Ryszard Kutner

Termin „soliton” – w dosłownym tłumaczeniu „samotnik” – pojawił się po raz pierwszy w pracy N. J. Zabusky'ego i M. D. Kruskala w roku 1965 (praca *Interaction of „solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states* opublikowana w *Physical Review Letters* 15, str. 240). Autorzy znaleźli na drodze czysto numerycznej rozwiązanie równania Kortewega – de Vriesa, mające postać zlokalizowanego przestrzennie „garbu” przesuwanego się bez zmiany amplitudy i kształtu. Dwa takie rozwiązania, biegnące naprzeciw siebie, zachowują się jak duchy: przenikają się wzajemnie bez zmian kształtów.

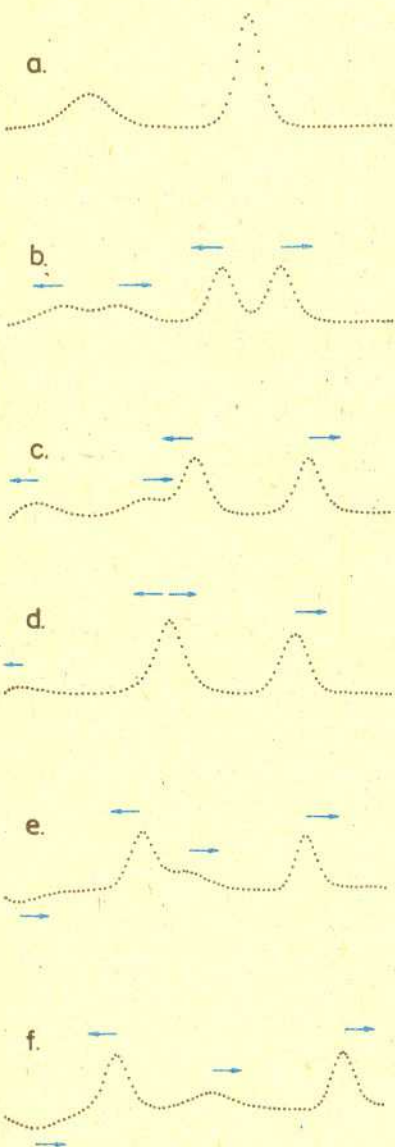
W poprzednim artykule (*Delta* 9/1988) omówiliśmy tzw. problem FPU, czyli zagadnienie ekwipartycji energii w jednowymiarowym łańcuchu, złożonym z drgających mas połączonych nieliniowymi (nie spełniającymi prawa Hooke'a) sprężynkami. Jak się okazało już po kilku latach, problem FPU otworzył prawdziwą puszkę Pandory z „nieliniowymi demonami”. O jednym z takich demonów – solitonie – opowiemy w tym artykule. Oczywiście, o solitonach mówiono i pisano już wiele – chcielibyśmy tu przedstawić przede wszystkim krótki program pozwalający „puszczać” solitony i badać ich własności za pomocą podręcznego mikrokomputera.

Postawienie problemu

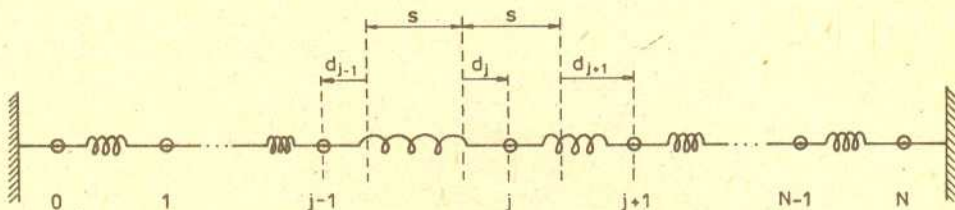
Będziemy kontynuowali wątek związany z jednowymiarowymi łańcuchami, zakładając tym razem, że siła, z jaką masa o numerze $j + 1$ działa na masę j (rys.1), jest postaci:

$$F(d_{j+1} - d_j) = -a\{\exp[-b \cdot (d_{j+1} - d_j)] - 1\}$$

(masy o numerach $j = 0$ i $j = N$ są, jak widać, unieruchomione).



Rys.2. Seria charakterystycznych ujęć migawkowych (będących kopiami ekranu) pokazujących przede wszystkim zderzenie dwóch solitonów.



Rys. 1

Łańcuch tego typu nosi nazwę sieci Tody. Moglibyśmy, rzecz jasna, przyjąć tak jak w poprzednim artykule, że $F(d_{j+1} - d_j) = \frac{k}{s}(d_{j+1} - d_j) + \frac{k}{s}\alpha(d_{j+1} - d_j)^2$. Sieć Tody ma jednak tę własność, że rozwiązania jej równań ruchu można wyrazić przez funkcje elementarne, a w granicznym przypadku ciągłego rozkładu mas równania ruchu przechodzą w równanie Kortewega – de Vriesa. Dla niewielkich wychyleń mas z położen równowagi w obu przypadkach siły są z dobrym przybliżeniem jednakowe (o ile założymy, że $\frac{k}{s} = a \cdot b > 0$ i $\alpha = -b/2$). Zapiszmy równania ruchu w najczęściej używanej postaci:

$$(1) \quad m \frac{d^2 y_j}{dt^2} = F(y_{j-1}) + F(y_{j+1}) - 2F(y_j),$$

gdzie $y_j = d_j - d_{j-1}$, $j = 0, 1, \dots, N$ oraz $y_0 = y_{N+1} = 0$. Analogiczne równania ruchu dotyczą także drgań skrętnych dysków połączonych w łańcuchach nieliniowymi sprężynkami; mogą też być przepisane w języku charakterystycznym dla obwodów elektrycznych (tzw. równania Hiroty) lub zagadnień ekologicznych (tzw. równanie Volterry). Naszym celem jest teraz numeryczne rozwiązanie układu równań (1).

„Puszczamy” solitony

Skorzystamy z metody, którą z powodzeniem stosowaliśmy poprzednio dla problemu FPU (tzw. metoda ekstrapolacji parabolicznej). Poszukujemy rozwiązania y_j w kolejnych chwilach odległych o $\Delta t = t_{n+1} - t_n$, $n = 0, 1, \dots$. Algorytm nasz ma więc postać:

$$(2) \quad y_j(t_{n+1}) = 2y_j(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{m} \{F(y_{j+1}(t_n)) + F(y_{j-1}(t_n)) - 2F(y_j(t_n))\} - y_j(t_{n-1}),$$

gdzie $y_j(t_n)$ oznacza, oczywiście, wartości y_j w chwili t_n . Aby algorytm mógł wystartować, należy do układu równań (2) dołączyć odpowiednie warunki początkowe. Są one teraz bardziej skomplikowane niż w problemie FPU. W chwili początkowej wzbudzimy dwa solitony, tak jak to pokazano na rysunku 2a. Pionowo odłożona jest siła, z jaką masa o numerze $j - 1$ działa na masę o numerze j , a masy znajdują się w punktach odpowiadających rzutom prostopadłym kropek rysunku na prostą poziomą. W tym miejscu Czytelnik mógłby zadać pytanie, dlaczego wykreślamy siłę, a nie wychylenie kolejnych mas z położen równowagi. Odpowiedź jest prosta – oczywiście – można również wykreślać wychylenia, tym bardziej że program prawie je oblicza, zdecydowaliśmy się jednak na pokazanie wartości siły, dla uzmysłowienia,

że ona także może rozchodzić się wzdłuż łańcucha w postaci solitonów. Zmodyfikowanie programu tak, aby wykresiał wychylenia, pozostawiamy jako ćwiczenie.

Proszę zauważyć, że znając wartości siły w chwili początkowej $t_0 = 0$ dla każdego j możemy już odczytać potrzebne dalej wartości $y_j(0)$. W programie jest to wykonane w linii 400, w której zmienna $u(j)$ oznacza właśnie wyjściową wartość $y_j(0)$. Do wyznaczenia potrzebnych nam jeszcze wartości $y_j(t_1)$ (oznaczonej w programie jako $y(j)$) korzystamy z tzw. prostej metody Eulera i znajdujemy prędkość (oznaczoną jako $w(j)$) w połowie przedziału czasowego Δt (oznaczonego dt). Następnie możemy napisać, że $y(j) = u(j) + w(j) \cdot dt$, co wykonuje się w linii 470.

Obliczając siłę w chwili początkowej korzystamy z dosyć skomplikowanego wyrażenia:

$$-F(y_j(0)) = a \cdot \{\exp(-by_j(0)) - 1\} = \frac{d^2}{dt^2} S_j \Big|_{t=0}$$

gdzie

$$S_j = \frac{m}{b} \ln \{ \cosh[k_1(j - j_1) - \beta_1 t] + B_w \cosh[k_2(j - j_2) - \beta_2 t] \}$$

$$\beta_1 = 2\sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \frac{k_2}{2} \cosh \frac{k_2}{2}$$

$$\beta_2 = 2\sqrt{\frac{ab}{m}} \sinh \frac{k_1}{2} \cosh \frac{k_2}{2}$$

$$B_w = \cosh \frac{k_1}{2} \cosh \frac{k_2}{2}$$

Wzór ten potwierdza fakt, że nie jest łatwo wzbudzić w ośrodku nieliniowym i dyspersyjnym pojedyncze solitony – muszą być spełnione specjalne warunki początkowe. W załączonym programie sytuacja początkowa jest przygotowywana między liniami 330 i 480. Zastosowano przy tym następujące oznaczenia: $betj = \beta_j$, $j = 1, 2$, $FNS(\dots) = \sinh(\dots)$, $FNC(\dots) =$

$\cosh(\dots)$, $z(j) = \frac{d^2}{dt^2} S_j \Big|_{t=0}$, a pozostałe oznaczenia są identyczne jak w tekście artykułu.

Jedynie przygotowując sytuację początkową skorzystaliśmy ze specyficznych (danych wyżej) wzorów. W każdej następnej chwili rozwiązanie znajdowane jest za pomocą zamieszczonego algorytmu (2).

Trzeba zaznaczyć, że obserwujemy dwie pary solitonów, z których każda ma prędkości (oznaczone schematycznie strzałkami) skierowane przeciwnie. Szczególnie znaczące są ujęcia migawkowe przedstawione na rysunku 2 c – e. Jak widać, oba solitony (centralne) wyszły ze zderzenia bez szwanku. Przy okazji można zaobserwować odbicie najbardziej na lewo wysuniętego solitonu. Chcielibyśmy polecić dłuższą obserwację tego, co dzieje się w układzie. Sądzymy, że program dobrze nadaje się do samodzielnego eksperymentowania. Sugerujemy ponadto wykonanie kilku ćwiczeń, a mianowicie:

- napisanie programu (lub zmodyfikowanie naszego) symulującego ruch pojedynczego solitonu,
- to samo dla dwóch (a nie – jak u nas – czterech) solitonów,
- dołączenie podprogramu pokazującego, jak zmieniają się w czasie wychylenia atomów z położen równowagi towarzyszące biegnącym solitonom (reprezentującym, jak już mówiliśmy, odpowiednią siłę),
- wprowadzenie okresowych, a nie – jak u nas – odbijających, warunków brzegowych.

Mamy nadzieję, że zachęciliśmy Czytelników do samodzielnego działania.

Na zakończenie pragniemy dodać, że historia solitonów zaczęła się, jak się powszechnie uważa, w 1844 roku, kiedy to ukazała się pierwsza dwustronicowa wzmianka opublikowana przez J. Scott-Russella w materiałach Królewskiego Towarzystwa w Edynburgu, dotycząca dziwnej fali czy też garbu. Owa dziwna lub raczej samotna fala została wzbudzona na wąskim kanale w Szkocji przez łódkę, która specyficznie, jakoś inaczej niż zwykle, uderzyła o wodę. Scott-Russell gonił konno tę falę przez kilka kilometrów wzdłuż kanału nie obserwując żadnych znaczących zmian jej kształtu i prędkości.

Opis ten jako żywo pasuje do tego, co dzisiaj już wiemy o solitonach. Wiedzę tę mogliśmy znacznie rozbudować właśnie dzięki zastosowaniu metod numerycznych oraz komputerów. Trzeba podkreślić, że wiedza o solitonach to nie jest tylko sztuka dla sztuki. Znalazła ona już swoje zastosowania np. w badaniu jednowymiarowych zjawisk zachodzących w plazmie, w kryształach, w ferromagnetykach, a także w zjawiskach meteorologicznych itp.

```

0000000000 REM *****SIEC*****
0000000000 REM **TODAY - SOLITONY**
0000000000 REM *****Ryszard Kutner*****
0000000000 DIM u(128): REM Prędkość
0000000000 DIM v(128): REM Potencjał
0000000000 DIM y(128): REM Wyjściowa wartość
0000000000 DIM x(128): REM Potencjał
0000000000 DIM dt(128): REM Czas
0000000000 LET N=128: REM Liczba atomów
0000000000 LET m=1: REM Masa
0000000000 LET b=1: REM Współczynnik
0000000000 LET a=1: REM Współczynnik
0000000000 LET k1=1: REM Liczba
0000000000 LET k2=1: REM Liczba
0000000000 LET j1=100: REM Numer kolejnego
0000000000 LET j2=100: REM Numer kolejnego
0000000000 LET h=1: REM Długość
0000000000 LET lambda=1: REM Długość
0000000000 LET PI=3.141592653589793: REM Liczba
0000000000 LET beta1=0: REM Współczynnik
0000000000 LET beta2=0: REM Współczynnik
0000000000 LET Bw=0: REM Współczynnik
0000000000 LET sy=0: REM Współczynnik
0000000000 LET sz=0: REM Współczynnik
0000000000 LET z=0: REM Współczynnik
0000000000 LET t=0: REM Czas
0000000000 LET dt=0.01: REM Czas
0000000000 LET u=0: REM Prędkość
0000000000 LET v=0: REM Potencjał
0000000000 LET y=0: REM Wyjściowa wartość
0000000000 LET x=0: REM Potencjał
0000000000 LET t1=0: REM Czas
0000000000 LET t2=0: REM Czas
0000000000 LET t3=0: REM Czas
0000000000 LET t4=0: REM Czas
0000000000 LET t5=0: REM Czas
0000000000 LET t6=0: REM Czas
0000000000 LET t7=0: REM Czas
0000000000 LET t8=0: REM Czas
0000000000 LET t9=0: REM Czas
0000000000 LET t10=0: REM Czas
0000000000 LET t11=0: REM Czas
0000000000 LET t12=0: REM Czas
0000000000 LET t13=0: REM Czas
0000000000 LET t14=0: REM Czas
0000000000 LET t15=0: REM Czas
0000000000 LET t16=0: REM Czas
0000000000 LET t17=0: REM Czas
0000000000 LET t18=0: REM Czas
0000000000 LET t19=0: REM Czas
0000000000 LET t20=0: REM Czas
0000000000 LET t21=0: REM Czas
0000000000 LET t22=0: REM Czas
0000000000 LET t23=0: REM Czas
0000000000 LET t24=0: REM Czas
0000000000 LET t25=0: REM Czas
0000000000 LET t26=0: REM Czas
0000000000 LET t27=0: REM Czas
0000000000 LET t28=0: REM Czas
0000000000 LET t29=0: REM Czas
0000000000 LET t30=0: REM Czas
0000000000 LET t31=0: REM Czas
0000000000 LET t32=0: REM Czas
0000000000 LET t33=0: REM Czas
0000000000 LET t34=0: REM Czas
0000000000 LET t35=0: REM Czas
0000000000 LET t36=0: REM Czas
0000000000 LET t37=0: REM Czas
0000000000 LET t38=0: REM Czas
0000000000 LET t39=0: REM Czas
0000000000 LET t40=0: REM Czas
0000000000 LET t41=0: REM Czas
0000000000 LET t42=0: REM Czas
0000000000 LET t43=0: REM Czas
0000000000 LET t44=0: REM Czas
0000000000 LET t45=0: REM Czas
0000000000 LET t46=0: REM Czas
0000000000 LET t47=0: REM Czas
0000000000 LET t48=0: REM Czas
0000000000 LET t49=0: REM Czas
0000000000 LET t50=0: REM Czas
0000000000 LET t51=0: REM Czas
0000000000 LET t52=0: REM Czas
0000000000 LET t53=0: REM Czas
0000000000 LET t54=0: REM Czas
0000000000 LET t55=0: REM Czas
0000000000 LET t56=0: REM Czas
0000000000 LET t57=0: REM Czas
0000000000 LET t58=0: REM Czas
0000000000 LET t59=0: REM Czas
0000000000 LET t60=0: REM Czas
0000000000 LET t61=0: REM Czas
0000000000 LET t62=0: REM Czas
0000000000 LET t63=0: REM Czas
0000000000 LET t64=0: REM Czas
0000000000 LET t65=0: REM Czas
0000000000 LET t66=0: REM Czas
0000000000 LET t67=0: REM Czas
0000000000 LET t68=0: REM Czas
0000000000 LET t69=0: REM Czas
0000000000 LET t70=0: REM Czas
0000000000 LET t71=0: REM Czas
0000000000 LET t72=0: REM Czas
0000000000 LET t73=0: REM Czas
0000000000 LET t74=0: REM Czas
0000000000 LET t75=0: REM Czas
0000000000 LET t76=0: REM Czas
0000000000 LET t77=0: REM Czas
0000000000 LET t78=0: REM Czas
0000000000 LET t79=0: REM Czas
0000000000 LET t80=0: REM Czas
0000000000 LET t81=0: REM Czas
0000000000 LET t82=0: REM Czas
0000000000 LET t83=0: REM Czas
0000000000 LET t84=0: REM Czas
0000000000 LET t85=0: REM Czas
0000000000 LET t86=0: REM Czas
0000000000 LET t87=0: REM Czas
0000000000 LET t88=0: REM Czas
0000000000 LET t89=0: REM Czas
0000000000 LET t90=0: REM Czas
0000000000 LET t91=0: REM Czas
0000000000 LET t92=0: REM Czas
0000000000 LET t93=0: REM Czas
0000000000 LET t94=0: REM Czas
0000000000 LET t95=0: REM Czas
0000000000 LET t96=0: REM Czas
0000000000 LET t97=0: REM Czas
0000000000 LET t98=0: REM Czas
0000000000 LET t99=0: REM Czas
0000000000 LET t100=0: REM Czas
0000000000 LET t101=0: REM Czas
0000000000 LET t102=0: REM Czas
0000000000 LET t103=0: REM Czas
0000000000 LET t104=0: REM Czas
0000000000 LET t105=0: REM Czas
0000000000 LET t106=0: REM Czas
0000000000 LET t107=0: REM Czas
0000000000 LET t108=0: REM Czas
0000000000 LET t109=0: REM Czas
0000000000 LET t110=0: REM Czas
0000000000 LET t111=0: REM Czas
0000000000 LET t112=0: REM Czas
0000000000 LET t113=0: REM Czas
0000000000 LET t114=0: REM Czas
0000000000 LET t115=0: REM Czas
0000000000 LET t116=0: REM Czas
0000000000 LET t117=0: REM Czas
0000000000 LET t118=0: REM Czas
0000000000 LET t119=0: REM Czas
0000000000 LET t120=0: REM Czas
0000000000 LET t121=0: REM Czas
0000000000 LET t122=0: REM Czas
0000000000 LET t123=0: REM Czas
0000000000 LET t124=0: REM Czas
0000000000 LET t125=0: REM Czas
0000000000 LET t126=0: REM Czas
0000000000 LET t127=0: REM Czas
0000000000 LET t128=0: REM Czas
0000000000 LET t129=0: REM Czas
0000000000 LET t130=0: REM Czas
0000000000 LET t131=0: REM Czas
0000000000 LET t132=0: REM Czas
0000000000 LET t133=0: REM Czas
0000000000 LET t134=0: REM Czas
0000000000 LET t135=0: REM Czas
0000000000 LET t136=0: REM Czas
0000000000 LET t137=0: REM Czas
0000000000 LET t138=0: REM Czas
0000000000 LET t139=0: REM Czas
0000000000 LET t140=0: REM Czas
0000000000 LET t141=0: REM Czas
0000000000 LET t142=0: REM Czas
0000000000 LET t143=0: REM Czas
0000000000 LET t144=0: REM Czas
0000000000 LET t145=0: REM Czas
0000000000 LET t146=0: REM Czas
0000000000 LET t147=0: REM Czas
0000000000 LET t148=0: REM Czas
0000000000 LET t149=0: REM Czas
0000000000 LET t150=0: REM Czas
0000000000 LET t151=0: REM Czas
0000000000 LET t152=0: REM Czas
0000000000 LET t153=0: REM Czas
0000000000 LET t154=0: REM Czas
0000000000 LET t155=0: REM Czas
0000000000 LET t156=0: REM Czas
0000000000 LET t157=0: REM Czas
0000000000 LET t158=0: REM Czas
0000000000 LET t159=0: REM Czas
0000000000 LET t160=0: REM Czas
0000000000 LET t161=0: REM Czas
0000000000 LET t162=0: REM Czas
0000000000 LET t163=0: REM Czas
0000000000 LET t164=0: REM Czas
0000000000 LET t165=0: REM Czas
0000000000 LET t166=0: REM Czas
0000000000 LET t167=0: REM Czas
0000000000 LET t168=0: REM Czas
0000000000 LET t169=0: REM Czas
0000000000 LET t170=0: REM Czas
0000000000 LET t171=0: REM Czas
0000000000 LET t172=0: REM Czas
0000000000 LET t173=0: REM Czas
0000000000 LET t174=0: REM Czas
0000000000 LET t175=0: REM Czas
0000000000 LET t176=0: REM Czas
0000000000 LET t177=0: REM Czas
0000000000 LET t178=0: REM Czas
0000000000 LET t179=0: REM Czas
0000000000 LET t180=0: REM Czas
0000000000 LET t181=0: REM Czas
0000000000 LET t182=0: REM Czas
0000000000 LET t183=0: REM Czas
0000000000 LET t184=0: REM Czas
0000000000 LET t185=0: REM Czas
0000000000 LET t186=0: REM Czas
0000000000 LET t187=0: REM Czas
0000000000 LET t188=0: REM Czas
0000000000 LET t189=0: REM Czas
0000000000 LET t190=0: REM Czas
0000000000 LET t191=0: REM Czas
0000000000 LET t192=0: REM Czas
0000000000 LET t193=0: REM Czas
0000000000 LET t194=0: REM Czas
0000000000 LET t195=0: REM Czas
0000000000 LET t196=0: REM Czas
0000000000 LET t197=0: REM Czas
0000000000 LET t198=0: REM Czas
0000000000 LET t199=0: REM Czas
0000000000 LET t200=0: REM Czas
0000000000 LET t201=0: REM Czas
0000000000 LET t202=0: REM Czas
0000000000 LET t203=0: REM Czas
0000000000 LET t204=0: REM Czas
0000000000 LET t205=0: REM Czas
0000000000 LET t206=0: REM Czas
0000000000 LET t207=0: REM Czas
0000000000 LET t208=0: REM Czas
0000000000 LET t209=0: REM Czas
0000000000 LET t210=0: REM Czas
0000000000 LET t211=0: REM Czas
0000000000 LET t212=0: REM Czas
0000000000 LET t213=0: REM Czas
0000000000 LET t214=0: REM Czas
0000000000 LET t215=0: REM Czas
0000000000 LET t216=0: REM Czas
0000000000 LET t217=0: REM Czas
0000000000 LET t218=0: REM Czas
0000000000 LET t219=0: REM Czas
0000000000 LET t220=0: REM Czas
0000000000 LET t221=0: REM Czas
0000000000 LET t222=0: REM Czas
0000000000 LET t223=0: REM Czas
0000000000 LET t224=0: REM Czas
0000000000 LET t225=0: REM Czas
0000000000 LET t226=0: REM Czas
0000000000 LET t227=0: REM Czas
0000000000 LET t228=0: REM Czas
0000000000 LET t229=0: REM Czas
0000000000 LET t230=0: REM Czas
0000000000 LET t231=0: REM Czas
0000000000 LET t232=0: REM Czas
0000000000 LET t233=0: REM Czas
0000000000 LET t234=0: REM Czas
0000000000 LET t235=0: REM Czas
0000000000 LET t236=0: REM Czas
0000000000 LET t237=0: REM Czas
0000000000 LET t238=0: REM Czas
0000000000 LET t239=0: REM Czas
0000000000 LET t240=0: REM Czas
0000000000 LET t241=0: REM Czas
0000000000 LET t242=0: REM Czas
0000000000 LET t243=0: REM Czas
0000000000 LET t244=0: REM Czas
0000000000 LET t245=0: REM Czas
0000000000 LET t246=0: REM Czas
0000000000 LET t247=0: REM Czas
0000000000 LET t248=0: REM Czas
0000000000 LET t249=0: REM Czas
0000000000 LET t250=0: REM Czas
0000000000 LET t251=0: REM Czas
0000000000 LET t252=0: REM Czas
0000000000 LET t253=0: REM Czas
0000000000 LET t254=0: REM Czas
0000000000 LET t255=0: REM Czas
0000000000 LET t256=0: REM Czas
0000000000 LET t257=0: REM Czas
0000000000 LET t258=0: REM Czas
0000000000 LET t259=0: REM Czas
0000000000 LET t260=0: REM Czas
0000000000 LET t261=0: REM Czas
0000000000 LET t262=0: REM Czas
0000000000 LET t263=0: REM Czas
0000000000 LET t264=0: REM Czas
0000000000 LET t265=0: REM Czas
0000000000 LET t266=0: REM Czas
0000000000 LET t267=0: REM Czas
0000000000 LET t268=0: REM Czas
0000000000 LET t269=0: REM Czas
0000000000 LET t270=0: REM Czas
0000000000 LET t271=0: REM Czas
0000000000 LET t272=0: REM Czas
0000000000 LET t273=0: REM Czas
0000000000 LET t274=0: REM Czas
0000000000 LET t275=0: REM Czas
0000000000 LET t276=0: REM Czas
0000000000 LET t277=0: REM Czas
0000000000 LET t278=0: REM Czas
0000000000 LET t279=0: REM Czas
0000000000 LET t280=0: REM Czas
0000000000 LET t281=0: REM Czas
0000000000 LET t282=0: REM Czas
0000000000 LET t283=0: REM Czas
0000000000 LET t284=0: REM Czas
0000000000 LET t285=0: REM Czas
0000000000 LET t286=0: REM Czas
0000000000 LET t287=0: REM Czas
0000000000 LET t288=0: REM Czas
0000000000 LET t289=0: REM Czas
0000000000 LET t290=0: REM Czas
0000000000 LET t291=0: REM Czas
0000000000 LET t292=0: REM Czas
0000000000 LET t293=0: REM Czas
0000000000 LET t294=0: REM Czas
0000000000 LET t295=0: REM Czas
0000000000 LET t296=0: REM Czas
0000000000 LET t297=0: REM Czas
0000000000 LET t298=0: REM Czas
0000000000 LET t299=0: REM Czas
0000000000 LET t300=0: REM Czas
0000000000 LET t301=0: REM Czas
0000000000 LET t302=0: REM Czas
0000000000 LET t303=0: REM Czas
0000000000 LET t304=0: REM Czas
0000000000 LET t305=0: REM Czas
0000000000 LET t306=0: REM Czas
0000000000 LET t307=0: REM Czas
0000000000 LET t308=0: REM Czas
0000000000 LET t309=0: REM Czas
0000000000 LET t310=0: REM Czas
0000000000 LET t311=0: REM Czas
0000000000 LET t312=0: REM Czas
0000000000 LET t313=0: REM Czas
0000000000 LET t314=0: REM Czas
0000000000 LET t315=0: REM Czas
0000000000 LET t316=0: REM Czas
0000000000 LET t317=0: REM Czas
0000000000 LET t318=0: REM Czas
0000000000 LET t319=0: REM Czas
0000000000 LET t320=0: REM Czas
0000000000 LET t321=0: REM Czas
0000000000 LET t322=0: REM Czas
0000000000 LET t323=0: REM Czas
0000000000 LET t324=0: REM Czas
0000000000 LET t325=0: REM Czas
0000000000 LET t326=0: REM Czas
0000000000 LET t327=0: REM Czas
0000000000 LET t328=0: REM Czas
0000000000 LET t329=0: REM Czas
0000000000 LET t330=0: REM Czas
0000000000 LET t331=0: REM Czas
0000000000 LET t332=0: REM Czas
0000000000 LET t333=0: REM Czas
0000000000 LET t334=0: REM Czas
0000000000 LET t335=0: REM Czas
0000000000 LET t336=0: REM Czas
0000000000 LET t337=0: REM Czas
0000000000 LET t338=0: REM Czas
0000000000 LET t339=0: REM Czas
0000000000 LET t340=0: REM Czas
0000000000 LET t341=0: REM Czas
0000000000 LET t342=0: REM Czas
0000000000 LET t343=0: REM Czas
0000000000 LET t344=0: REM Czas
0000000000 LET t345=0: REM Czas
0000000000 LET t346=0: REM Czas
0000000000 LET t347=0: REM Czas
0000000000 LET t348=0: REM Czas
0000000000 LET t349=0: REM Czas
0000000000 LET t350=0: REM Czas
0000000000 LET t351=0: REM Czas
0000000000 LET t352=0: REM Czas
0000000000 LET t353=0: REM Czas
0000000000 LET t354=0: REM Czas
0000000000 LET t355=0: REM Czas
0000000000 LET t356=0: REM Czas
0000000000 LET t357=0: REM Czas
0000000000 LET t358=0: REM Czas
0000000000 LET t359=0: REM Czas
0000000000 LET t360=0: REM Czas
0000000000 LET t361=0: REM Czas
0000000000 LET t362=0: REM Czas
0000000000 LET t363=0: REM Czas
0000000000 LET t364=0: REM Czas
0000000000 LET t365=0: REM Czas
0000000000 LET t366=0: REM Czas
0000000000 LET t367=0: REM Czas
0000000000 LET t368=0: REM Czas
0000000000 LET t369=0: REM Czas
0000000000 LET t370=0: REM Czas
0000000000 LET t371=0: REM Czas
0000000000 LET t372=0: REM Czas
0000000000 LET t373=0: REM Czas
0000000000 LET t374=0: REM Czas
0000000000 LET t375=0: REM Czas
0000000000 LET t376=0: REM Czas
0000000000 LET t377=0: REM Czas
0000000000 LET t378=0: REM Czas
0000000000 LET t379=0: REM Czas
0000000000 LET t380=0: REM Czas
0000000000 LET t381=0: REM Czas
0000000000 LET t382=0: REM Czas
0000000000 LET t383=0: REM Czas
0000000000 LET t384=0: REM Czas
0000000000 LET t385=0: REM Czas
0000000000 LET t386=0: REM Czas
0000000000 LET t387=0: REM Czas
0000000000 LET t388=0: REM Czas
0000000000 LET t389=0: REM Czas
0000000000 LET t390=0: REM Czas
0000000000 LET t391=0: REM Czas
0000000000 LET t392=0: REM Czas
0000000000 LET t393=0: REM Czas
0000000000 LET t394=0: REM Czas
0000000000 LET t395=0: REM Czas
0000000000 LET t396=0: REM Czas
0000000000 LET t397=0: REM Czas
0000000000 LET t398=0: REM Czas
0000000000 LET t399=0: REM Czas
0000000000 LET t400=0: REM Czas
0000000000 LET t401=0: REM Czas
0000000000 LET t402=0: REM Czas
0000000000 LET t403=0: REM Czas
0000000000 LET t404=0: REM Czas
0000000000 LET t405=0: REM Czas
0000000000 LET t406=0: REM Czas
0000000000 LET t407=0: REM Czas
0000000000 LET t408=0: REM Czas
0000000000 LET t409=0: REM Czas
0000000000 LET t410=0: REM Czas
0000000000 LET t411=0: REM Czas
0000000000 LET t412=0: REM Czas
0000000000 LET t413=0: REM Czas
0000000000 LET t414=0: REM Czas
0000000000 LET t415=0: REM Czas
0000000000 LET t416=0: REM Czas
0000000000 LET t417=0: REM Czas
0000000000 LET t418=0: REM Czas
0000000000 LET t419=0: REM Czas
0000000000 LET t420=0: REM Czas
0000000000 LET t421=0: REM Czas
0000000000 LET t422=0: REM Czas
0000000000 LET t423=0: REM Czas
0000000000 LET t424=0: REM Czas
0000000000 LET t425=0: REM Czas
0000000000 LET t426=0: REM Czas
0000000000 LET t427=0: REM Czas
0000000000 LET t428=0: REM Czas
0000000000 LET t429=0: REM Czas
0000000000 LET t430=0: REM Czas
0000000000 LET t431=0: REM Czas
0000000000 LET t432=0: REM Czas
0000000000 LET t433=0: REM Czas
0000000000 LET t434=0: REM Czas
0000000000 LET t435=0: REM Czas
0000000000 LET t436=0: REM Czas
0000000000 LET t437=0: REM Czas
0000000000 LET t438=0: REM Czas
0000000000 LET t439=0: REM Czas
0000000000 LET t440=0: REM Czas
0000000000 LET t441=0: REM Czas
0000000000 LET t442=0: REM Czas
0000000000 LET t443=0: REM Czas
0000000000 LET t444=0: REM Czas
0000000000 LET t445=0: REM Czas
0000000000 LET t446=0: REM Czas
0000000000 LET t447=0: REM Czas
0000000000 LET t448=0: REM Czas
0000000000 LET t449=0: REM Czas
0000000000 LET t450=0: REM Czas
0000000000 LET t451=0: REM Czas
0000000000 LET t452=0: REM Czas
0000000000 LET t453=0: REM Czas
0000000000 LET t454=0: REM Czas
0000000000 LET t455=0: REM Czas
0000000000 LET t456=0: REM Czas
0000000000 LET t457=0: REM Czas
0000000000 LET t458=0: REM Czas
0000000000 LET t459=0: REM Czas
0000000000 LET t460=0: REM Czas
0000000000 LET t461=0: REM Czas
0000000000 LET t462=0: REM Czas
0000000000 LET t463=0: REM Czas
0000000000 LET t464=0: REM Czas
0000000000 LET t46
```