KĄCIK PRAC uczniowskich

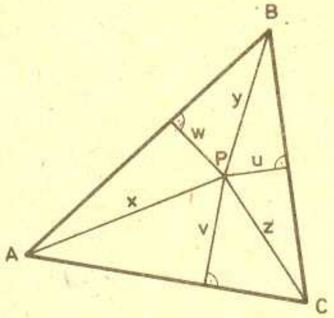
Rozwiązywane przez K. Hryniewieckiego zadanie zostało postawione przez P. Erdösa, a rozwiązał je L. J. Mordell w 1937 roku. W monografii L. Fejes Totha towarzyszy mu tekst: Prosty dowód tej pięknej nierówności metodami geometrii elementarnej nie jest do tej chwili znany (rok 1953).

Red.

Kiedyś wiele trudności sprawiło mi takie zadanie:

Niech P będzie punktem wewnętrznym trójkąta ABC. Wykazać, że jeśli x, y, z są odległościami P odpowiednio od wierzchołków A, B, C a u, v, w – odległościami od boków BC, CA i AB, to (rys.1)

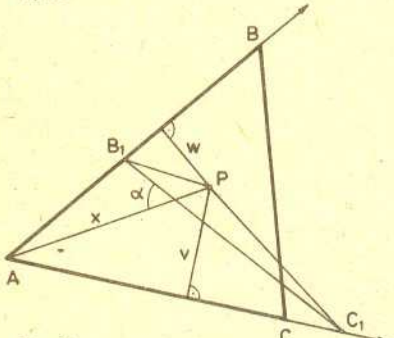
$$x+y+z \geq 2(u+v+w).$$



Rys.1

Długo nie mogłem rozwiązać tego zadania. W końcu jednak natrafiłem na ogólną metodę dowodzenia tego typu nierówności. Oto ona – najpierw ogólnie.

Obierzmy dodatkowo na półprostych $AB^{\rightarrow}$ i $AC^{\rightarrow}$ punkty B_1 i C_1 oraz oznaczmy jeden z kątów między prostymi AP i B_1C_1 przez α. Ze znanego wzoru na pole czworokąta otrzymujemy (rys.2)



Rys.2

$$\frac{1}{2}x \cdot B_1C_1 \cdot \sin\alpha = P_{AB_1PC_1} = P_{AB_1P} + P_{AC_1P} = \frac{1}{2}w \cdot AB_1 + \frac{1}{2}v \cdot AC_1.$$

Ponieważ $\sin\alpha \leq 1$, więc

$$(*) \qquad x \cdot B_1C_1 \geq w \cdot AB_1 + v \cdot AC_1.$$

Stosując tę ogólną nierówność do przypadku $B_1 = B$ i $C_1 = C$ mamy

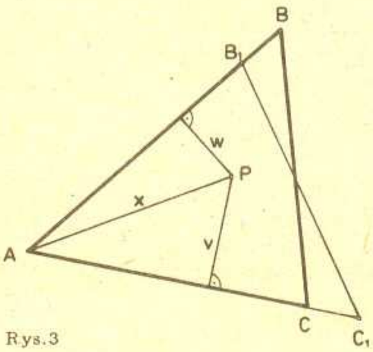
$$x \geq \frac{AB}{BC}w + \frac{AC}{BC}v.$$

Analogicznie uzyskujemy

$$y \geq \frac{AB}{AC}w + \frac{BC}{AC}u,$$
$$z \geq \frac{AC}{AB}v + \frac{BC}{AB}u.$$

Zsumowanie tych nierówności, niestety, nie daje nierówności dowodzonej.

Zastosujmy jednak nierówność $(*)$ do sytuacji, gdy B_1 i C_1 są obrane tak, że $AB_1 = AC$ i $AC_1 = AB$. Otrzymamy wtedy (rys.3)



Rys.3

$$x \geq \frac{AC}{BC}w + \frac{AB}{BC}v,$$

bo $B_1C_1 = BC$. Podobnie uzyskujemy

$$y \geq \frac{BC}{AC}w + \frac{AB}{AC}u,$$
$$z \geq \frac{BC}{AB}v + \frac{AC}{AB}u.$$

Zsumowanie tych nierówności daje już pożądany wynik

$$x+y+z \geq \left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)u + \left(\frac{AB}{BC}+\frac{BC}{AB}\right)v + \left(\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AC}\right)w \geq 2(u+v+w),$$

gdyż dla dodatnich dowolnych p i q jest $\frac{p}{q}+\frac{q}{p} \geq 2$.

Czytelnicy zechcą spróbować dowieść w analogiczny sposób nierówności

$$ax+by+cz \geq 4S,$$
$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \leq \frac{1}{u}+\frac{1}{v}+\frac{1}{w},$$
$$xyz \geq \frac{R}{2r}(u+v)(v+w)(w+u),$$

gdzie $a = AB$, $b = AC$, $c = BC$, S jest polem , a R i r to promienie okręgów opisanego i wpisanego w trójkąt ABC.

Oczywiście, można zapewne zaproponować i udowodnić jeszcze inne nierówności i to niekoniecznie dla trójkątów (a, powiedzmy, dla czworokątów).

Krzysztof HRYNIEWIECKI

Rozwiązanie zadania M 525.
Przyjmijmy $d = a - b$ i załóżmy, że n dzieli się przez p^m, ale nie dzieli się przez p^{m+1}, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym liczby n. Jeśli p nie jest dzielnikiem d, to w dalszym ciągu $(a^n - b^n)/(a-b)$ dzieli się przez p^m. Zauważmy, że

$$\frac{a^n-b^n}{d} = \frac{(b+d)^n-b^n}{d} = \sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}b^{n-i}d^{i-1}.$$

Jeśli p jest dzielnikiem d, to każdy składnik tej sumy dzieli się przez p^m. Otóż $\binom{n}{i}$ jest pewną wielokrotnością n, podzieloną przez $i!$, wystarczy więc udowodnić, że d^{i-1} dzieli się przez p w takiej potędze, przez jaką dzieli się $i!$. Skorzystamy ze wzoru z poprzedniego zadania: $i!$ dzieli się przez p^k, gdzie $k = \sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{i}{p^j}\right]$. Czyli

$$k < \sum_{j=1}^{\infty}\frac{i}{p^j} = \frac{i}{p-1} \leq i.$$

Zatem $k \leq i-1$. Z drugiej strony p^{i-1} jest dzielnikiem d^{i-1}, co kończy dowód.