

# Statyka katedr gotyckich – zastosowanie modelowania fotoelastycznego

Dr hab. Jan KRÓLIKOWSKI

*Zmysły radują się rzeczami należycie odmierzonymi, gdyż mają je za sobie podobne, bowiem zmysł to także rodzaj rozumu, jak każda władza poznawcza*

Tomasz z Akwinu  
*Summa Theologiae*

## „Problem katedr”

Na przełomie XII i XIII wieku w okolicach Paryża pojawiły się wielkie katedry budowane w nowym stylu gotyckim, budowle oparte na koncepcji radykalnie odmiennej od panującej poprzednio, rządzącej stylem romańskim. Na rysunku 1 przedstawiono przekrój poprzeczny trzech kościołów: romańskiego St. Foy w Conques (Płd. Francja, 1150), wczesnogotyckiej katedry Notre Dame w Laon (około 1160) i jednej z wielkich katedr Gotyku Wniosłego, katedry Notre Dame w Reims (1211). Porównując te budowle zauważamy, że

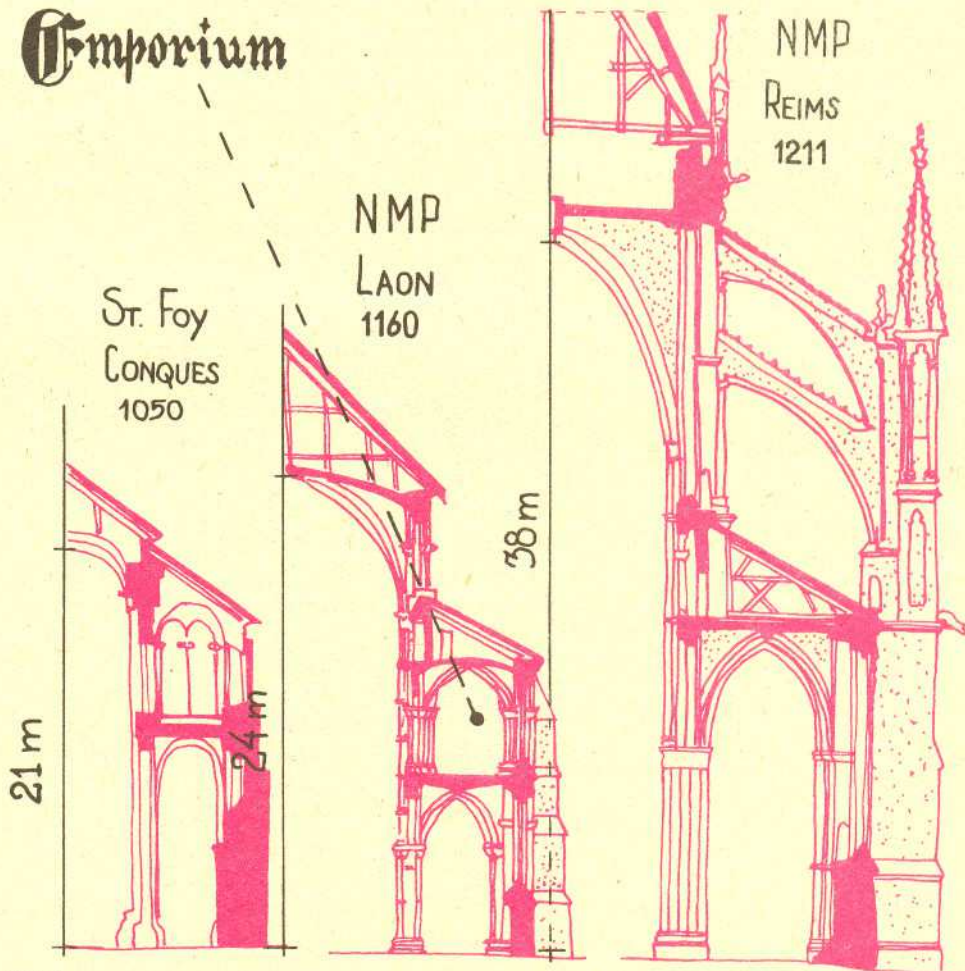
- 1) katedry gotyckie są niemal dwukrotnie wyższe od romańskich,
- 2) szerokość nawy głównej zwiększa się,
- 3) grubość murów nawy głównej maleje.

## Gmporium

St. Foy  
CONQUES  
1050

NMP  
LAON  
1160

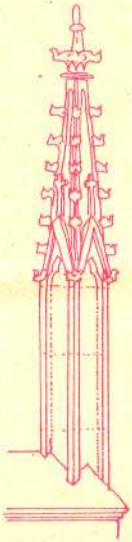
NMP  
REIMS  
1211



Rys. 1

Wnętrze kościoła w Conques przypomina ciemny i długi tunel w porównaniu z obszernym wnętrzem podobnej do niego wymiarami katedry w Laon. Wnętrze katedry w Reims to już pustka rozświetlona kolorowym światłem z wielkich witraży, które zajmują większość ścian.

O modelowaniu fotoelastycznym można przeczytać na str. 17.



## Heretyczna







**Rozwiązanie zadania M 521.**  
Niech  $ABC$  będzie danym trójkątem. Istnieje przekształcenie afiniczne  $f$ , przekształcające ten trójkąt na trójkąt równoboczny  $A'B'C'$ . Wiadomo, że przekształcenia afiniczne przeprowadzają elipsy na elipsy oraz zachowują stosunek pól. Opiszmy okrąg  $O'$  na  $A'B'C'$  i niech  $E$  będzie elipsą, opisaną na  $ABC$ , przy czym  $f(E) = O'$ . Stosunek pola  $O'$  do pola  $A'B'C'$  (a także pola  $E$  do pola  $ABC$ ) wynosi  $r$ . Zauważmy teraz, że trójkątem o największym polu, wpisanym w okrąg, jest trójkąt równoboczny. Ponadto każdą elipsę można przekształcić afinicznie na okrąg. Dlatego stosunek pola każdej elipsy do pola każdego trójkąta wpisanego jest nie większy niż  $r$ . W rezultacie elipsa  $E = f^{-1}(O')$ , dla której stosunek pól wynosi  $r$ , jest szukanym rozwiązaniem.



**Rozwiązanie zadania M 522.**  
Mamy

$$f(s) \cdot f(t) = h(ts),$$

gdzie  $h$  jest pewną funkcją. Biorąc pochodną obu stron względem zmiennej  $s$  otrzymujemy

$$f'(s) \cdot f(t) = t \cdot h'(ts),$$

skąd po uwzględnieniu pierwszego równania mamy

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = t \cdot \frac{h'(ts)}{h(ts)}.$$

Po podstawieniu  $t = \frac{1}{s}$  otrzymujemy

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{1}{s} \cdot \frac{h'(1)}{h(1)} = \frac{1}{s} \cdot A.$$

Zatem

$$[\log f(s)]' = A \cdot \frac{1}{s},$$

czyli

$$\log f(s) = A \cdot \log s + C,$$

gdzie  $C$  może być dowolną stałą. Ostatecznie

$$f(s) = e^C \cdot s^A = D \cdot s^A,$$

gdzie  $D > 0$ .

Wobec tego  $f$  jest (z dokładnością do stałej) funkcją potęgową.

Możliwość wznoszenia ogromnych, pustych budowli o ażurowych ścianach zawdzięczali budowniczości średniowieczni wielkimi wynalazkami „latającego” łuku przyporowego, przenoszącego naprężenia górnych części ścian (pochodzące od ciężaru dachu i sklepienia nawy) na masywne filary umieszczone na zewnątrz budowli (rysunek na okładce). Dzięki łukom przyporowym ściana nawy nie przenosiła już dużych naprężeń, co umożliwiło zwiększenie jej wysokości, zmniejszenie grubości i wreszcie przebicie w niej ogromnych okien, prawdziwej koronki kamiennych kolumniek, łuków i ozdób.

Nie wiemy, kto był autorem tego wynalazku, ale możemy dość dokładnie prześledzić, jak został on dokonany. Stadium pośrednim była tu katedra w Laon, gdzie nad nawami bocznymi wybudowano jak gdyby drugie nawy, tzw. emporia. Łuki sklepień emporiów przenosiły rozpierające naprężenia nawy głównej na zewnętrzne masywne przypory ściany nawy bocznej. Pozwoliło to na zwiększenie względnej wysokości nawy głównej w stosunku do naw bocznych oraz niemal dwukrotne poszerzenie nawy głównej. Stąd tylko jeden krok do przeniesienia łuków emporiów na zewnątrz budynku – czyli do konstrukcji łuku przyporowego. Pierwszy znany nam łuk przyporowy wybudowano w 1180 r. w katedrze Nôtre Dame w Paryżu, a już w 1193 r. w Chartres zbudowano podwójne łuki przyporowe; dolny przenosił naprężenia statyczne pochodzące przede wszystkim od sklepienia nawy głównej, górny zaś naprężenia dynamiczne związane z działaniem wiatru na wysoki dach katedry.

Można powiedzieć, że przełom techniczny dokonał się w ciągu jednego pokolenia budowniczych. Jak to się jednak stało, stanowi zagadkę, której rozwiązaniu poświęcili wiele uwagi historycy sztuki i architektury oraz budowniczowie i konstruktorzy. Historycy sztuki zwrócili uwagę na klimat intelektualny, społeczny i gospodarczy czasu katedr, który w Europie Zachodniej był okresem prosperity gospodarczej oraz wielkiego rozwoju filozofii scholastycznej. Te niezwykle cenne rozważania dostarczają nam wyjaśnień, dlaczego właśnie wtedy rozpoczęto budowę większych i wyższych kościołów, ale nie tłumaczą, jak to mogło być możliwe od strony technicznej:

Próby rozwiązania zagadki przez budowniczych i architektów do niedawna nie doprowadzały do rozwiązania, a nawet można powiedzieć, że oddalały nas od niego, gdyż wiele wyników otrzymanych do 1960 r. okazało się po prostu wynikami błędnymi. Istotny przełom związany jest z nazwiskiem prof. Roberta Marka z Uniwersytetu w Princeton, który w latach sześćdziesiątych rozpoczął wraz z grupą współpracowników analizę naprężeń w budowlach gotyckich posługując się technikami modelowania w materiałach fotoelastycznych. Badania te zostały w latach siedemdziesiątych uzupełnione przez obliczenia komputerowe (metodami elementów skończonych). Wyniki badań prof. Marka są zbyt obszerne, żeby można je było przedstawić w tym artykule. Ograniczę się do opisu techniki doświadczalnej, dzięki której można było rozwiązać wiele zagadek, takich jak pytanie czy górne łuki przyporowe były tylko elementami zdobniczymi lub czy sterczyny na szczytach przypór są tylko elementami dekoracyjnymi, czy też są niezbędne dla stabilności konstrukcji. Nim jednak opiszę wyniki i technikę doświadczalną, muszę poświęcić kilka zdań siłom działającym na konstrukcję katedr oraz własnościom materiałów budowlanych używanych do budowy katedr.

## Średniowieczne materiały budowlane

Do budowy francuskich katedr używano ciosów kamiennych, najczęściej z wapienia – kamienia, który można łatwo obrabiać. Jeżeli w pobliżu budowy brakło wapienia, decydowano się na trudniejszy surowiec – piaskowiec, tuf wulkaniczny lub nawet granit. Ciosy były spajane za pomocą zaprawy wapiennej – wodnej zawiesiny kryształów wodorotlenku wapnia. Nadmiar wody wyparowywał lub był wchłaniany przez kamień; proces wiązania zaprawy trwał od kilku dni do kilku tygodni. Innym ważnym materiałem budowlanym było drewno. Drewniane belki stosowano w wieżbie dachowej. Drewno służyło również do konstrukcji rusztowań podtrzymujących łuki przyporowe od dołu, do czasu związania zaprawy.

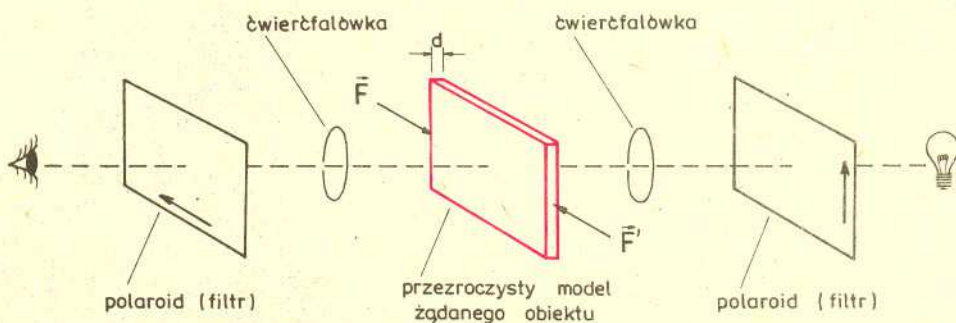
Wytrzymałość wapienia – podstawowego budulca katedr – zależy silnie od rodzaju naprężenia. Wapień jest stosunkowo odporny na ściskanie w zakresie naprężeń  $2 \cdot 10^7 - 2 \cdot 10^8 \text{ N/m}^2$ , ale jego odporność na rozciąganie jest mniej więcej dziesięć razy mniejsza:  $2 \cdot 10^6 - 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ . Zaprawa wapienna, oczywiście po pełnym związaniu, jest w stanie wytrzymać rozciąganie mniej więcej dziesięć razy słabsze niż wapień, tj.  $2 \cdot 10^5 - 2 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ , stanowi więc najslabsze ogniwo budynku. Innym typem naprężeń, które występuje w obszarach łuków przyporowych, jest zginanie. Jednorodny cios wapienny jest dość odporny na to odkształcenie, ale łuki przyporowe były budowane z wielu bloków kamiennych połączonych zaprawą i właśnie zaprawa między blokami najslabiej znosi zginanie.



Średniowieczny budowniczy musiał więc zadbać o to, żeby siły rozciągające i zginające były jak najmniejsze, nie musiał zaś zbyt przejmować się siłami ściskającymi. W jaki sposób umiano ocenić, czy siły nie przekroczyły wartości dopuszczalnych? Nie wiemy dokładnie, jak to robiono, ogromną rolę odgrywało z pewnością doświadczenie, wieloletnie terminowanie w zawodzie. Być może wykorzystywano pewną specyficzną własność budowli wiązanych zaprawą wapienną, która ma stosunkowo długi czas wiązania. Po wymurowaniu elementów budynku, zaś przed ostatecznym związaniem elementów zaprawy można częściowo usunąć rusztowanie. Jeżeli naprężenia są zbyt duże, zaprawa zaczyna wtedy pękać. Można ustawić rusztowanie z powrotem i wzmocnić konstrukcję. Warto zwrócić tu uwagę, że katedra gotycka ma w zasadzie strukturę modułarną – składa się z wielu identycznych sekcji. Doświadczenia zebrane przy konstrukcji pierwszej sekcji mogą być przeniesione bez zmian na następne.

### Modelowanie konstrukcji i obciążeń katedr

Metoda, którą zastosował prof. Mark, jest znana od sześćdziesięciu lat. Polega ona na wykorzystaniu własności żywic epoksydowych, tzw. fotoelastyczności, czyli zamrażania naprężeń. Próbkę z materiału fotoelastycznego poddana naprężeniom w temperaturze około 150°C i następnie ochłodzona do temperatury pokojowej wykazuje pamięć tych naprężeń. Materiał fotoelastyczny charakteryzuje się dwójłomnością wymuszoną pod wpływem naprężeń, a różnica współczynników załamania promieni zwyczajnych i nadzwyczajnych jest proporcjonalna do występującego naprężenia. Umieszczając próbkę w polarymetrze (rys.2) i oświetlając ją światłem monochromatycznym obserwujemy prążki interferencyjne.



Rys.2. Polaryzacyjna analiza naprężeń.

Oświetlając próbkę światłem białym możemy zaobserwować piękne interferencyjne wzory barwne (rysunki na tylnej okładce). Jakościowo, obszary o dużym zagęszczeniu linii są obszarami dużych naprężeń, naprężenia zginające charakteryzują się niemal równoległymi liniami interferencji wzdłuż osi elementu, brak linii to małe naprężenia. Metoda polegająca na wykorzystaniu fotoelastyczności nadaje się również do obliczeń ilościowych. Naprężenie  $f_m$  (na jednostkę długości) w punkcie modelu, charakteryzującym się rzędem interferencji  $N$ , jest proporcjonalne do  $N$ :

$$(1) \quad f_m = K \cdot N,$$

gdzie czynnik kalibrujący  $K$  możemy wyznaczyć z niezależnego pomiaru poddając prosty element, np. prostopadłościan, znanemu naprężeniu. Za pomocą wzoru (1) oraz interpolacji możemy wykonać mapę naprężeń w modelu. Porównanie naprężenia statycznego  $f_m$  w modelu i w konstrukcji w pełnej skali  $f_p$  jest możliwe dzięki skalowaniu. Jeżeli wszystkie elementy konstrukcji są przeskalowane przez ten sam czynnik oraz rozkłady sił zewnętrznych działających na model i konstrukcję są takie same, wtedy można wprowadzić parametr bezwymiarowy wiążący wymiary geometryczne, siły zewnętrzne (obciążenia) i naprężenia wewnątrz konstrukcji; parametr ten będzie miał taką samą wartość dla konstrukcji i modelu.

W naszym przypadku między naprężeniem  $f$ , wysokością budynku  $L$  i całkowitym obciążeniem  $F$  zachodzi następujący związek:

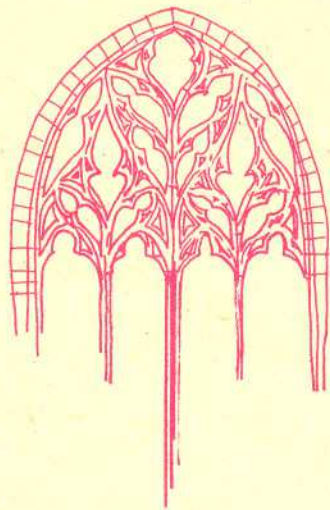
$$(2) \quad f_m \frac{L_m}{F_m} = f_p \frac{L_p}{F_p}$$

( $m$  – model,  $p$  – konstrukcja w pełnej skali), czyli

$$(3) \quad f_p = f_m \frac{L_m}{L_p} \frac{F_p}{F_m},$$

gdzie  $(L_m/L_p)$  jest skalą modelu,  $(F_p/F_m)$  jest stosunkiem całkowitych obciążeń konstrukcji i modelu. Za pomocą wyrażeń (1) i (3) można więc prosto obliczać naprężenia konstrukcji o zawiłych kształtach stosując badania modelowe.



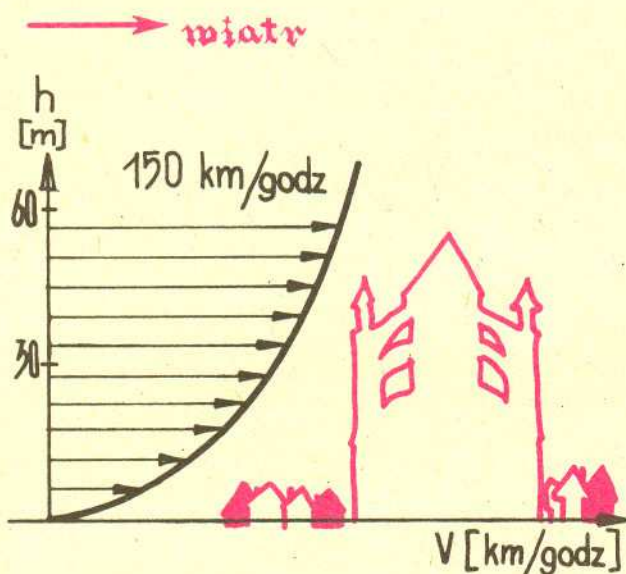


Metoda ta jest powszechnie stosowana np. w przemyśle lotniczym lub przy projektowaniu osłon reaktorów elektrowni atomowych. Zastosowanie jej do badania katedr wymagało zbadania obciążeń działających na te wysokie budowle. Obciążenia mogą być statyczne – przede wszystkim ciężar sklepienia i dachu, oraz dynamiczne – ciężar śniegu zgromadzonego na dachu lub ciśnienie wiatru. Poprawne uwzględnienie siły wiatru okazało się trudne. Prędkość wiatru zależy od wysokości nad ziemią oraz od otoczenia budynku – im więcej wysokich domów w okolicy, tym jest ona mniejsza. Prof. Mark ocenił tę prędkość posługując się danymi meteorologicznymi zebranymi w okolicy katedr oraz przyjmując zabudowę okolicy odpowiadającą wysokością średniowiecznemu miastu. Typowa zależność prędkości wiatru od wysokości dla okolic katedry w Amiens przedstawiona jest na rysunku 3.

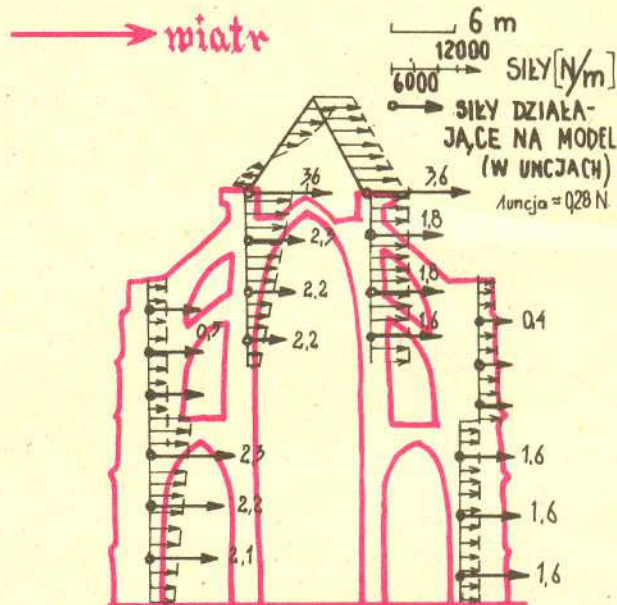
Dokładniejsze badania w tunelu aerodynamicznym pokazały, że ciśnienie wiatru (lub podciśnienie na zawietrznej stronie katedry) jest skomplikowaną funkcją prędkości  $v$  i wysokości nad ziemią  $h$ :

$$(4) \quad p(V, h) = \frac{1}{2} C(h) \cdot G \cdot V^2.$$

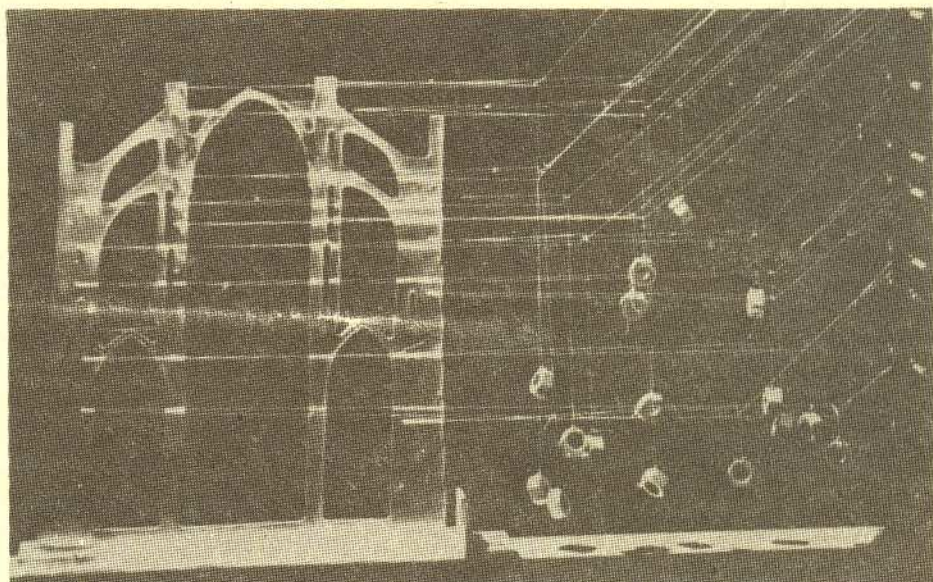
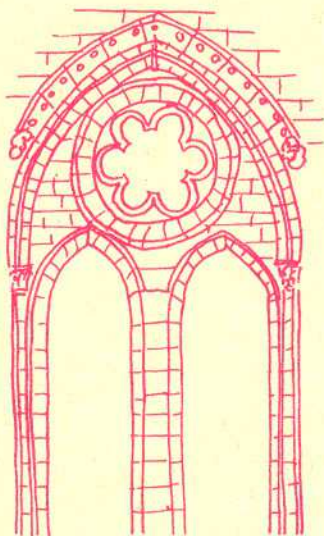
Zmienność współczynnika  $C(h)$  pokazana jest na rysunku 4. (Czynnik  $G$  został wprowadzony, żeby uwzględnić nierównomierne porywy wiatru.) Wynikiem zastosowania wzoru (4) jest np. rozkład obciążeń (w N/m) pokazany także na rysunku 4; na tym rysunku pokazano również miejsca, w których został obciążony model służący do badań fotoelastycznych. Poniżej zamieściliśmy fotografię modelu katedry w Amiens przygotowanego do pomiaru uwzględniającego wpływ wiatru.



Rys.3



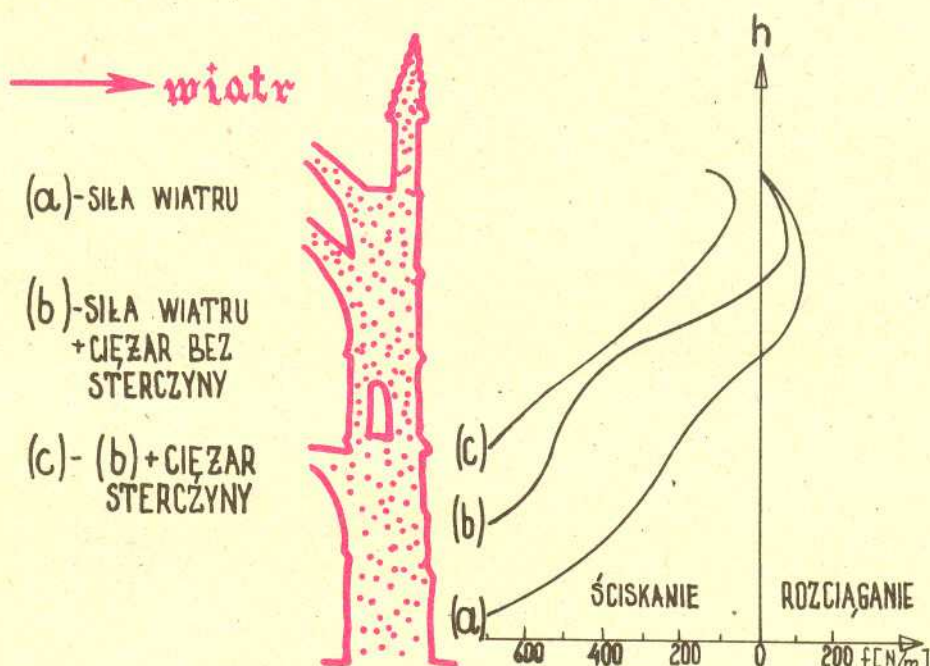
Rys.4





Jako pierwsze z zastosowań metody doświadczalnej opisanej powyżej prof. Mark wybrał modelowanie naprężenia w okolicy sterzcyny przypory katedry w Amiens (rysunek na okładce). Ta wspaniała budowla rozpoczęta przez Roberta de Luzarches około 1220 r., jest od lat uważana przez historyków sztuki za typowy przykład Gotyku Wzniosłego, zarówno dzięki swej wysokości (nawa – 42 m), jak i elegancji, logicznej spójności i lekkości konstrukcji. Jeden z wybitnych architektów XIX w. Viollet-le-Duc, szermierz logiki konstrukcyjnej gotyku, uważał, że sterzcyna umieszczona na skraju przypory ma do spełnienia ważną rolę konstrukcyjną, ale nie umiał tego stwierdzenia udowodnić. Na pierwszy rzut oka wydaje się to stwierdzeniem dziwnym. Po pierwsze – całkowity ciężar sterzcyny (0,5 t) jest zanedbywalny w stosunku do ogromnego ciężaru przypory (1000 t). Po drugie – można by się spodziewać, że sterzcyna umieszczona bliżej osi nawy mogłaby mieć pewne znaczenie konstrukcyjne równoważąc momenty sił rozpychających przypory na zewnątrz. Niemal powszechną praktyką było jednak umieszczanie sterzcyn na zewnętrznej stronie przypory, gdzie mogły one tylko zwiększać momenty sił, a więc niepożądane odkształcenia zginające i rozciągające łuki przyporowe.

Badania fotoelastyczne pozwoliły ustalić jednak, że lokalne znaczenie sterzcyny w konstrukcji poddanej wpływowi wiatru ma kluczowe znaczenie dla stabilności konstrukcji. Na rysunku 5 widzimy siłę działającą na zewnętrzną krawędź zawietrznej przypory: uwzględniono tu osobno siłę wiatru, sumę siły wiatru i obciążeń grawitacyjnych bez sterzcyny i wreszcie wypadkową siłę uwzględniając ciężar sterzcyny.



Rys.5

O ile bez sterzcyny górna część przypory podlega siłom rozciągającym, to dodanie sterzcyny zmienia zwrot siły na ściskającą. Jak wiemy, budowle gotyckie „nie znoszą” rozciągania. Dalsze doświadczenia pokazały, że umieszczenie sterzcyny bliżej osi nawy nie zmienia zwrotu siły, a więc nie prowadzi do oczekiwanych efektów.

### Porównanie konstrukcji katedr w Bourges i Chartres – budownictwo indywidualne i projekt typowy

Katedry w Chartres i Bourges zaczęto budować mniej więcej w tym samym czasie – około 1195 r. Katedra w Chartres (rysunek na tylnej okładce) z masywnymi, podwójnymi łukami przyporowymi była konstrukcją typową – na niej wzorowali się budowniczowie późniejszych katedr w Amiens, Reims, Rouen. Pięcionawowa katedra w Bourges pozostała bez naśladowców. Obie katedry powstawały w okresie eksperymentowania z łukami przyporowymi, ich konstruktorzy zastosowali je w odmienny sposób. Łuk z przyporą w systemie Chartres waży około 1000 t, w systemie Bourges jest o 60% lżejszy, waży około 400 t. Dlaczego właśnie cięższy i droższy system Chartres został powielony w innych budowlach ?



Sfatałkowanych

płytek

formy





## FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENMEL

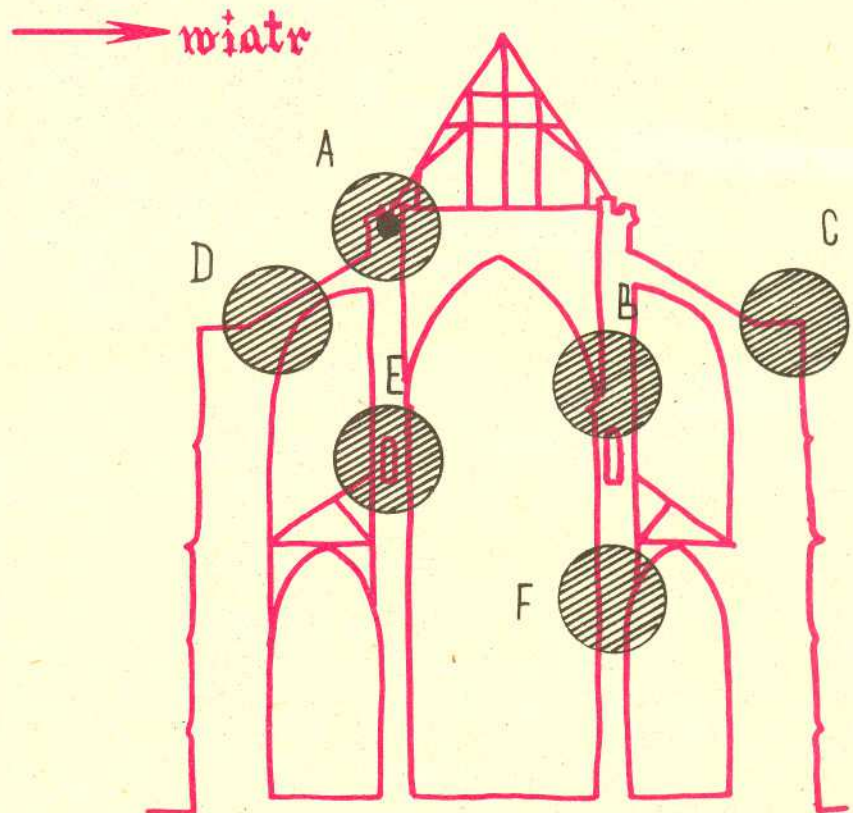
### NERWOPODOBNE SIECI ELEMENTÓW ELEKTRONICZNYCH

Sposób pracy najlepszego znanego "komputera osobistego", jakim jest mózg ludzki, jest, jak dotąd, istotnie różny od zasad działania obecnie wytwarzanych mikroprocesorów i budowanych z nich bardziej złożonych układów. Współczesne małe i duże komputery są w stanie wykonywać niezwykle szybko ogromne ilości konkretnych, zadanych poleceń. Natomiast w niewielkim stopniu dysponują one umiejętnością uczenia się i aktywnego dostosowywania do danego problemu. Różnica ta będzie jednak w najbliższym czasie maleć, gdyż rozpoczęto już opracowywanie i wytwarzanie układów elementów elektronowych imitujących strukturę sieci neuronowej w organizmach żywych. Kilka amerykańskich laboratoriów kończy opracowywanie całej gamy nerwopodobnych obwodów scalonych. Na przykład grupa fizyków ciała stałego pracujących w Pasadenie (Kalifornia, USA) ogłosiła, że przed końcem roku 1988 będzie dysponować nerwopodobnym układem scalonym o wysokiej skali integracji (VLSI). Układ ten ma być stworzony z mniejszych "synaptycznych klocków", z których każdy jest zbudowany z matrycy  $32 \times 32$  jednobitowych komórek. Podobne cyfrowo-analogowe układy scalone przygotowywane są przez laboratoria wielkiej amerykańskiej firmy Bell. Z kolei fizycy z Uniwersytetu w Pittsburgu (Pensylwania, USA) opracowali specjalne elementy elektronowe imitujące pracę pojedynczych neuronów. W Kalifornii powstała już nawet firma Synapsis Inc., która ma zamiar zacząć produkcję i sprzedaż nerwopodobnych układów scalonych. Natomiast teoretycy pracujący w Los Alamos (Nowy Meksyk, USA) sprawdzają obecnie na superkomputerze Cray X-MP algorytmy sieci neuronowych i twierdzą, że są one stokrotnie dokładniejsze od metod obecnie stosowanych. Generalnie rzecz biorąc, nerwopodobne sieci będą mogły być stosowane do szybkiego przetwarzania obrazów. (Spotykając znajomego na ulicy nie porównujemy jego wizerunku ze wszystkimi znanymi sobie osobami — a tak by postępował tradycyjny komputer.) Dalej — do nauki i rozpoznawania charakterów pisma, do odtwarzania brakujących elementów jakiegoś układu i innych podobnych działań itp. Niektórzy twórcy twierdzą, że wprost trudno jest przewidzieć możliwe zastosowania tych nowych układów. Czy to wszystko oznacza możliwość konstrukcji myślących komputerów? Raczej za wcześniej o tym mówić. Po prostu dzięki nerwopodobnym układom scalonym i nowemu rodzajowi oprogramowania imitującego proces myślenia kolejne generacje komputerów będą trochę "mniej bezmyślne". W końcu umiejętność czytania różnych charakterów pisma czy rozpoznawania i klasyfikacji obserwowanych obiektów posiada już, w wysokim stopniu, dziesięcioletnie dziecko. Można więc stwierdzić, że komputery wychodzą powoli z wieku niemowlęcego i posyłamy je do szkoły podstawowej.

Badania modelowe prof. Marka wykazują, że system Bourges jest nieporównanie bardziej bezpieczny, np. maksymalne naprężenie rozciągające występuje po nawietrznej stronie katedry w okolicy połączenia górnego łuku przyporowego ze ścianą nawy i wynosi około  $7 \cdot 10^4 \text{ N/m}^2$ . W systemie Chartres w tym samym miejscu naprężenie jest prawie cztery razy większe (około  $3 \cdot 10^5 \text{ N/m}^2$ ). Nacisk wiatru na sekcję nawy w Bourges wynosi około  $6 \cdot 10^4 \text{ N}$ , w Chartres zaś prawie dwa razy tyle —  $1,1 \cdot 10^5 \text{ N}$ .

Porównując przekroje naw pokazane na rysunku na tylnej okładce zauważamy, że łuki przyporowe w Bourges opadają bardziej stromo niż łuki w Chartres oraz dolny łuk przyporowy w Bourges styka się ze ścianą nawy bliżej i niżej niż w Chartres. Dzięki temu większość naprężeń dynamicznych związanych z wiatrem jest przenoszona przez bardziej masywny dolny łuk przyporowy. W systemie Chartres dolne łuki przyporowe są zbyt nisko, żeby mogły spełniać tę rolę, stąd dużo większe naprężenia rozciągające górnych łuków po nawietrznej stronie katedry. Ponadto górny łuk przyporowy dotyka ściany katedry bardzo wysoko, tuż obok wiązań dachowych, tylko po to, żeby uniemożliwić pojawienie się krytycznych napięć rozciągających, gdyby zawiął wiatr.

Badania modelowe pokazują więc, że system Bourges był dużo bardziej racjonalny i bezpieczny oraz dwukrotnie tańszy. Najwyraźniej nie zgadzał się on jednak z wyobrażeniami średniowiecznych budowniczych dotyczącymi bezpieczeństwa katedr. Dowód tego znajdujemy w dwóch ostatnich przęsłach nawy w Bourges, zbudowanych po 1232 r., po zaangażowaniu nowego budowniczego, który nie chciał (lub nie mógł) zmienić systemu lekkich łuków Bourges na masywne łuki Chartres, ale najwyraźniej czuł się nieswojo. Zwiększył więc niemal dwukrotnie grubość dwóch ostatnich górnych łuków przyporowych. Jak przekonywająco wykazał prof. Mark, nie istniały ku temu powody konstrukcyjne.



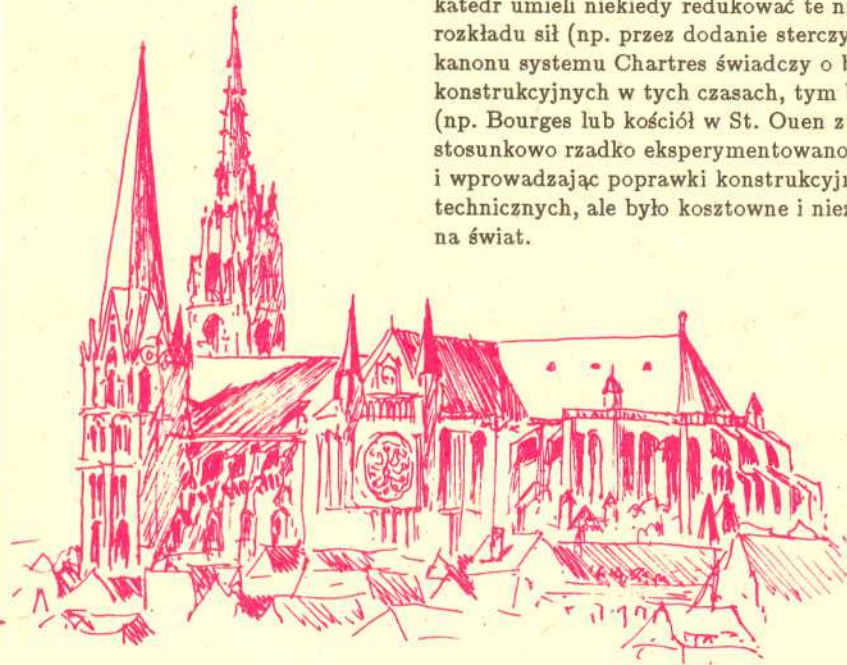
Rys.6.

- A — przedłużenie łuków przyporowych po stronie nawietrznej — zginanie i rozciąganie (Chartres)
- B — przedłużenie łuków przyporowych po stronie zawietrznej — zginanie i obrót (Chartres)
- C — zawietrzna krawędź przypory — rozciąganie (Amiens)
- D — łuk przyporowy — zginanie i rozciąganie (Chartres)
- E — okolice obejścia na poziomie dachu nawy bocznej — duże naprężenia ściskające filarów zewnętrznych (Bourges)
- F — połączenie filarów nawy głównej z filarami ściany nawy — silne naprężenia zginające (Beauvais).

W nawiasach podano nazwy katedr, w których w odpowiednich obszarach naprężenia przekraczają krytyczne wartości.



Analiza strukturalna katedr gotyckich oparta o modelowanie fotoelastyczne pozwoliła na wyjaśnienie kilku zagadek związanych z ich budową. Wyodrębniono kilka obszarów, w których mogą występować krytycznie duże naprężenia rozciągające (rys.6), związane przede wszystkim z parciem wiatru na budowlę. Okazało się, że budowniczowie katedr umieli niekiedy redukować te naprężenia za pomocą zmiany lokalnego rozkładu sił (np. przez dodanie sterczyny lub filarów). Z drugiej strony przyjęcie jako kanonu systemu Chartres świadczy o bardzo niedoskonałym zrozumieniu problemów konstrukcyjnych w tych czasach, tym bardziej że istniały konstrukcje doskonalsze (np. Bourges lub kościół w St. Ouen z końca XIII w.). Świadczy to także o tym, że stosunkowo rzadko eksperymentowano z konstrukcjami, np. badając pęknięcia zaprawy i wprowadzając poprawki konstrukcyjne, co leżało w zakresie ówczesnych możliwości technicznych, ale było kosztowne i niezgodne ze średniowiecznym sposobem patrzenia na świat.



Katedra  
w Chartres



Katedra  
Notre-Dame  
w Paryżu



## Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

**M 520.** Szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , gdzie  $u_n > 0$ , jest zbieżny. Niech  $r_n = u_n + u_{n+1} + \dots$

Udowodnić, że szereg  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n}$  jest rozbieżny.

Rozwiązanie na str.13

**M 521.** Jaka elipsa opisana na trójkącie ma najmniejsze pole ?

Rozwiązanie na str.2

**M 522.** Dodatnia i różniczkowalna funkcja  $f$ , określona na przedziale  $(0, \infty)$  ma następującą własność:  $f(s) \cdot f(t)$  zależy tylko od iloczynu  $s \cdot t$ . Jaka funkcją może być  $f$  ?

Rozwiązanie na str.2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

**F 254.** Wyobraźmy sobie, że w pewnej chwili wszystkie cząsteczki powietrza znajdujące się w piłce futbolowej leżącej na podłodze zaczęły poruszać się pionowo w górę. Ocenić, na jaką wysokość wzniosłaby się wtedy piłka ? Przyjąć masę piłki  $M$  równą 400 g, promień  $r = 10$  cm, a ciśnienie powietrza wewnątrz piłki  $p = 1,5p_0$ , gdzie  $p_0 = 10^5$  Pa jest normalnym ciśnieniem atmosferycznym. Temperatura powietrza wynosi  $0^\circ\text{C}$ . Średnia masa molowa powietrza  $\mu$  jest równa 29 g/mol.

Rozwiązanie na str.12

**F 255.** Ocenić prędkość pocisku wylatującego z naboju, który eksploduje wrzucony do ogniska. Prędkość pocisku wylatującego przy wystrzale tego samego naboju w strzelbie wynosi około 800 m/s. Stosunek masy pocisku do masy łuski wynosi  $m_p/m_l = 3$ .

Rozwiązanie na str.15