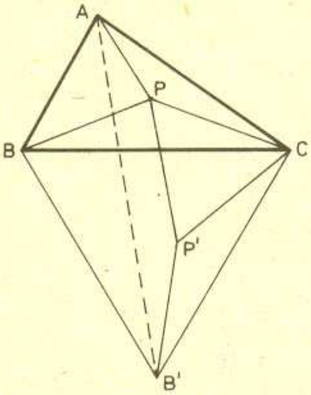
Autor jest studentem fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego.

Sieć dróg dla czterech miejscowości

NGUYEN CHUONG CHI

W ligowym zadaniu 151 w *Delcie* 5/1987 chodziło o zaprojektowanie sieci dróg o najmniejszej sumie długości łączących cztery miejscowości w wierzchołkach kwadratu. Chcę tu zaproponować czysto geometryczne rozwiązanie zadania ogólniejszego – kwadrat może być zastąpiony dowolnym czworokątem o kątach nie większych od 120° (nie jest to najszersza klasa czworokątów, do których „pasuje" moje rozwiązanie, ale ograniczmy się tylko do niej).

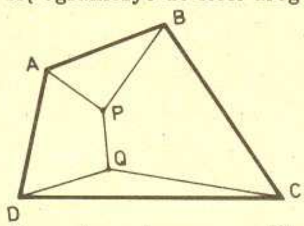
Rozwiązanie, które proponuję, jest analogiczne do rozwiązania problemu Fermata (patrz np. *Delta* 11/1986). Aby analogia była widoczna, przytoczę to rozwiązanie wraz z krótkim dowodem.

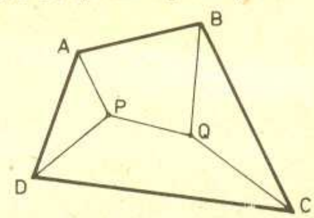


Dla dowolnego trójkąta o kątach nie większych od 120° suma odległości dowolnego punktu od wierzchołków tego trójkąta jest najmniejsza, gdy boki trójkąta są widoczne z tego punktu pod równymi kątami (a więc 120°).

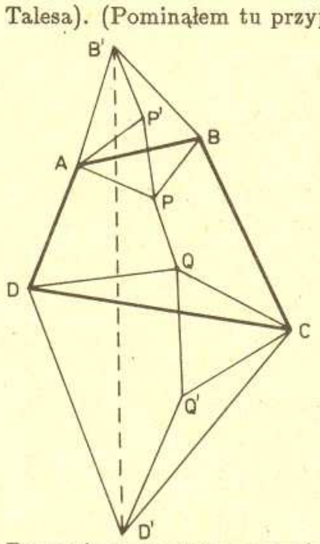
Dowód: Weźmy trójkat ABC spełniający założenia twierdzenia i dowolny punkt P. Obróćmy punkty P i B o 60° wokół C otrzymując punkty P' i B'. Trójkąty CBB' i CPP' są zatem równoboczne. W szczególności $PP' = PC$ i $P'B' = PB$. Stąd $S = PA + PB + PC = AP + PP' + P'B'$. Ponieważ punkty A i B' nie zależą od tego, jak wybraliśmy punkt P, więc S ma najmniejszą wartość, gdy łamana $APP'B$ jest odcinkiem. Łatwo zauważyć, że tak jest, gdy kąty APC i $B'P'C$ (równy kątowi BPC) mają po 120°.

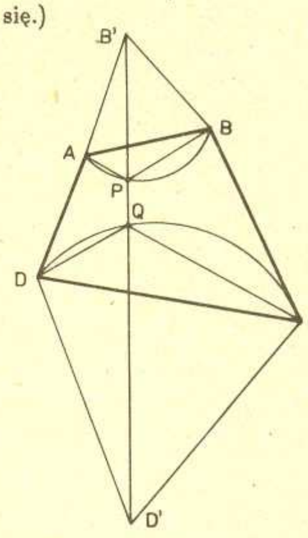
Przejdźmy teraz do czworokąta. Aby nie powtarzać części rozumowania zamieszczonego przy rozwiązaniu zadania 151 (*Delta* 9/1987), przyjmę, że wystarczy się ograniczyć do sieci dróg złożonych z pięciu odcinków – jak na rysunku poniżej.





Rozważmy pierwszy z nich. Obracając P i B wokół A oraz Q i D wokół C o kąt 60° otrzymujemy odpowiednio P' i B' oraz Q' i D'. Analogicznie jak w przypadku trójkąta $S = PA + PB + PQ + QC + QD = B'P' + P'P + PQ + QQ' + Q'D'$. Znów S ma najmniejszą wartość, gdy $B'P'PQQ'D'$ jest odcinkiem, a więc gdy $\angle APB = \angle BPQ = \angle QPA = \angle DQC = \angle CQP = \angle PQD = 120°$. Takie punkty P i Q łatwo znaleźć rysując na AB i na DC łuki, z których widać te odcinki pod kątem 120° (tzw. łuki Talesa). (Pominąłem tu przypadek, gdy łuki te przecinają się.)





Powstaje tu następne pytanie. Jeśli podaną metodę zastosuję do boków AD i CB zamiast AB i CD, to również otrzymam minimalną długość sieci dróg. Które z otrzymanych minimów jest mniejsze ? Czy można to ocenić „z góry", przed wykreśleniem obu odcinków realizujących te minima ?

Rozwiązanie zadania F 254.
Na podstawie zasady zachowania pędu możemy zapisać, że w przybliżeniu

$$mv = Mu,$$

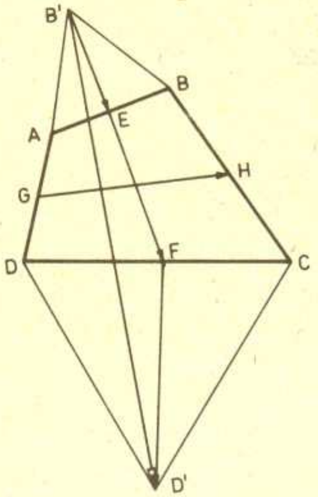
gdzie m jest masą wszystkich cząsteczek powietrza wewnątrz piłki, v ich średnią prędkością; M i u oznaczają masę i prędkość piłki po zderzeniu cząsteczek z jej wewnętrzną powierzchnią. Na podstawie zasady zachowania energii poszukiwana wysokość h wynosi

$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{m^2v^2}{2M^2g}.$$

Masa m wszystkich cząsteczek powietrza jest równa

$$m = \frac{pV\mu}{RT} \approx 6 \text{ g},$$

przy objętości piłki $V = (4/3)\pi r^3 \approx \approx 4 \cdot 10^3 \text{ cm}^3$ oraz średniej masie molowej powietrza $\mu = 29$ g/mol. Prędkość v molekuł powietrza $v \approx 4 \cdot 10^2$ m/s otrzymamy ze wzoru $E_{kin} = (3/2)kT$, gdzie k jest stałą Boltzmanna. Przyjmując $g \approx 10 \text{ m/s}^2$ otrzymamy, że wysokość, na jaką wzniesie się piłka, wyniosłaby około 2 m.



Minimum S w rozpatrzonym szczegółowo przypadku to długość odcinka $B'D'$. Spróbujmy tę długość obliczyć. Oznaczmy przez E, F, G i H środki boków czworokąta (jak na rysunku). Wówczas $B'E \perp AB$ i $D'F \perp DC$. Wygodnie nam będzie jeszcze posługiwać się operacją o, która każdemu wektorowi (swobodnemu) $\vec{w}$ przyporządkowuje wektor (tej samej długości) obrócony o kąt $-90°$. Mamy więc

$$\overrightarrow{B'E} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, o(\overrightarrow{AB}), \qquad \overrightarrow{FD'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, o(\overrightarrow{DC}).$$

Stąd

$$\overrightarrow{B'D'} = \overrightarrow{B'E} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FD'} = \overrightarrow{EF} + \sqrt{3}\, o(\overrightarrow{GH}),$$

gdyż $\overrightarrow{B'E} + \overrightarrow{FD'} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(o(\overrightarrow{AB}) + o(\overrightarrow{DC})\right) = \sqrt{3}\, o\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}\right)$ oraz $\overrightarrow{GH} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}}{2}$.
Stąd kwadrat minimalnej sumy dróg jest

$$B'D'^2 = |\overrightarrow{B'D'}|^2 = \left(\overrightarrow{EF} + \sqrt{3}\, o(\overrightarrow{GH})\right)^2 = EF^2 + 3\,GH^2 + 2\sqrt{3}\left(\overrightarrow{EF} \cdot o(\overrightarrow{GH})\right),$$

ponieważ $\left(o(\overrightarrow{GH})\right)^2 = |\overrightarrow{GH}|^2 = GH^2$.

Jeśli teraz rozważymy drugi przypadek (wprowadzając analogicznie do B' i D' punkty A' i C'), otrzymamy jako kwadrat drugiego minimum sumy długości dróg

$$A'C'^2 = GH^2 + 3\,EF^2 + 2\sqrt{3}\left(\overrightarrow{GH} \cdot o(\overrightarrow{EF})\right).$$

Nietrudno przekonać się, że $\overrightarrow{EF} \cdot o(\overrightarrow{GH}) = \overrightarrow{GH} \cdot o(\overrightarrow{EF})$. Wobec tego

$$B'D' > A'C' \iff B'D'^2 > A'C'^2 \iff GH^2 > EF^2 \iff GH > EF.$$

Zatem minimalną sumę długości sieci dróg otrzymamy wykonując naszą konstrukcję dla tej pary przeciwległych boków czworokąta, której środki boków są bardziej oddalone.

A jak rozwiązać analogiczne zadanie dla pięcio- czy sześciokąta ?

KĄCIK PRAC uczniowskich

Zespolone układy pozycyjne

Do układu dziesiątkowego przywykliśmy od urodzenia. Niektórzy słyszeli co nieco o innych układach pozycyjnych: dwójkowym, trójkowym, piątkowym itd. W układzie o podstawie p występuje p cyfr: $0, 1, 2, \ldots, p-1$, a liczbę $c_n c_{n-1} \ldots c_0\,_{(p)}$ interpretujemy jako $c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} + \ldots + c_0$. Jeśli p jest liczbą naturalną większą od 1, to w układzie pozycyjnym o podstawie p możemy zapisać dowolną liczbę całkowitą, o ile dopuścimy użycie znaku „$-$" dla oznaczenia liczb ujemnych. Stosuje się też układy o ujemnej podstawie. Jeśli $p < -1$, to używamy takich samych cyfr jak w układzie o podstawie $-p$, a liczby interpretujemy według tego samego wzoru. Teraz możemy wszystkie liczby całkowite zapisać bez używania minusa. Na przykład -1 w układzie minusdwójkowym zapisuje się jako $(11)_{-2} = -2 + 1 = -1$.

A teraz przejdźmy do liczb zespolonych. Interesować nas będą liczby postaci $a + bi$, gdzie a, b są liczbami całkowitymi. Jeśli $p = a + bi$, $b \neq 0$, to w układzie o podstawie p będziemy używać $a^2 + b^2$ cyfr: $0, 1, 2, \ldots, a^2 + b^2 - 1$, a interpretacja zapisu liczby będzie odbywała się według tego samego wzoru. Jeśli np. $p = 2i$, to używamy cyfr $0, 1, 2, 3$ i liczbę $(c_n c_{n-1} \ldots c_0)_{2i}$ interpretujemy jako $c_n (2i)^n + c_{n-1} (2i)^{n-1} + \ldots + c_0$, np. $2i = (10)_{2i}$, $-3 - 4i = (1121)_{2i} = (2i)^3 + (2i)^2 + 2 \cdot 2i + 1 = -8i - 4 + 4i + 1$. Zauważamy jednak, że liczby i nie możemy zapisać w tym układzie bez użycia przecinka. Mamy natomiast $(10{,}2)_{2i} = 2i + 2\left(\frac{1}{2i}\right) = 2i - i = i$, czyli i wygląda w tym układzie jak ułamek.

A jak będzie w innych układach ? Jakie liczby dadzą się w nich zapisać bez przecinka ? Warto byłoby też przedstawić graficznie na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb 2,3,4,...-cyfrowych w różnych układach pozycyjnych. Wydaje się, że dla podstawy $p = a + bi$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, takie zbiory powinny mieć przedstawienia o dosyć kapryśnych kształtach.

J.W.

Rozwiązanie zadania M 520.
Mamy $r_n = u_n + r_{n+1}$. Zatem

$$\frac{r_{n+1}}{r_n} = 1 - \frac{u_n}{r_n},$$

$$\frac{r_{n+2}}{r_n} = \left(1 - \frac{u_n}{r_n}\right)\left(1 - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}}\right) > 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}}$$

i podobnie

$$\frac{r_{n+p}}{r_n} > 1 - \frac{u_n}{r_n} - \frac{u_{n+1}}{r_{n+1}} - \ldots - \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}}.$$

Jednakże $r_{n+p} \to 0$, gdy $p \to \infty$, a stąd wynika, że dla każdego n istnieje takie p, że

$$\frac{u_n}{r_n} + \ldots + \frac{u_{n+p}}{r_{n+p}} > \frac{1}{2},$$

zatem szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{r_n}$ jest rozbieżny.