i
$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)\ldots(i+n)} = \frac{1}{n(n+1)\ldots(2n)}\,.$$

A zatem

$$S_n = (n-1)!\left(\frac{1}{n^2(n+1)\ldots(2n)} + \frac{1}{n(n+1)\ldots(2n)}\right) = $$
$$= \frac{3(n-1)!}{n(n+1)\ldots(2n)} = \frac{3((n-1)!)^2}{(2n)!}\,.$$

Mamy więc wzór
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{((n-1)!)^2}{(2n)!}\,.$$

Szereg po prawej stronie jest zbieżny bardzo szybko. Zachodzi bowiem nierówność

$$\frac{((n-1)!)^2}{(2n)!} \le \frac{1}{n4^n}, \quad \text{dla} \quad n \ge 4\,,$$

którą można udowodnić przez indukcję. Wystarczy w tym celu zauważyć, że jest ona prawdziwa dla $n = 4$, gdyż $\frac{1}{1120} \le \frac{1}{1024}$, i pokazać, że dla każdego n mamy

$$\frac{(2n+1)(2n+2)}{n^2} \ge 4\frac{n+1}{n}\,,$$

co jest oczywiste.

Sumując pierwsze $m-1$ wyrazów szeregu, gdzie $m \ge 4$, popełniamy błąd mniejszy niż

$$3\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n4^n} \le \frac{3}{m4^m}\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{m4^{m-1}}\,.$$

Aby obliczyć S z dokładnością do 10^{-10}, wystarczy więc zsumować pierwsze 16 wyrazów.

Oto zadanie dla dociekliwych Czytelników.

Czy suma szeregu $\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln\ln n (\ln\ln\ln n)^2}$ jest większa, czy mniejsza niż 1?

Liczba a, od której zaczynamy sumowanie, jest najmniejszą liczbą k, dla której $\ln\ln\ln k > 1$ (tzn. $a = \left[\mathrm{e}^{e^e}\right] + 1$). Tym razem szereg jest jeszcze wolniej zbieżny niż poprzednio: suma wyrazów o numerach większych od $\mathrm{e}^{e^{e^k}}$ jest rzędu $\frac{1}{k}$, w dodatku suma całego szeregu różni się od 1 o mniej niż 10^{-8}.

Opracował dr Jerzy RYLL

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 517. Niech $f(x,y,z) = xy + xz + yz - 2xyz$. Udowodnić, że jeśli $x,y,z \ge 0$, $x+y+z = 1$, to $f(x,y,z) \le 7/27$. (MOM 1984)
Rozwiązanie na str. 1

M 518. Rzucamy trzema symetrycznymi monetami. Te, na których wypadł orzeł, rzucamy jeszcze raz, itd. aż do chwili, gdy będą same reszki. Ile średnio rzutów potrzeba do zakończenia doświadczenia ?
Rozwiązanie na str. 1

M 519. Czy można z 18 kamieni domina 2×1 złożyć taki kwadrat, że każdy odcinek (różny od boku) łączący przeciwległe brzegi kwadratu przechodzi przez wnętrze któregoś kamienia ?
Rozwiązanie na str. 2

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 252. Do jakiej wysokości można napełnić szklany zbiornik mający mały otworek w dnie tak, aby ciecz nie zwilżająca szkła nie wylała się ?
Rozwiązanie na str. 15

F 253. W cieczy zwilżającej szkło zanurzono szklaną kapilarę tak, że jej wystający ponad powierzchnię odcinek jest krótszy niż wysokość, na jaką podniósłby się słupek cieczy w dłuższej kapilarze. Jak będzie skierowana wypukłość menisku i jaki będzie jej promień ?
Rozwiązanie na str. 16