Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty”

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 165 /WT=2,88/ i 166 /WT=1,79/ z numeru 2/1988

Krzysztof Hryniewiecki	- Białystok	44,87pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	41,77pkt
Adam Ruszel	- Krosno	40,58pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	38,92pkt
Adam Przeździecki	- Warszawa	38,50pkt

Pan Hryniewiecki - pięćdziesiąty piąty w Klubie 44 M.

Zadania z matematyki nr 175, 176

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1988

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

175. Dany jest trójkąt ABC, w którym $|\angle ABC| = |\angle BCA| = 40°$. Na półprostej $AB^{\rightarrow}$ znajdujemy taki punkt D, że $|AD| = |BC|$. Wyznaczyć kąty trójkąta ADC.

176. Dowieść, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ i dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność

$$\left(x^2 + x + \frac{n}{2}\right)^n > \frac{1}{2}\left(x^{2n} + (x+1)^{2n}\right).$$

Zadanie **176** zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

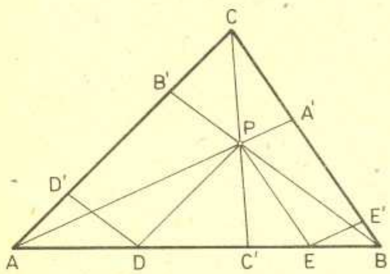
Rozwiązania zadań z numeru 5/1988

Przypominamy treść zadań:

171. Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC prowadzimy proste AP, BP, CP, przecinające przeciwległe boki odpowiednio w punktach A', B', C'. Dowieść, że długość pewnego boku trójkąta ABC przekracza sumę odległości punktu P od punktów A', B', C'.

172. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (x_n):

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{ne}.$$



171. Niech AB będzie najdłuższym bokiem trójkąta ABC. Jest on dłuższy od każdego z odcinków AA', BB', CC'. Niech D i E będą takimi punktami boku AB, że $DP \| AC$, $EP \| BC$. Niech wreszcie D' i E' będą punktami leżącymi odpowiednio na bokach AC i BC, dla których $DD' \| BB'$, $EE' \| AA'$ (rysunek). Z podobieństwa trójkątów ABB' i ADD' i z nierówności $|AB| > |BB'|$ wnosimy, że $|AD| > |DD'| = |PB'|$. Analogicznie $|BE| > |PA'|$. Z podobieństwa trójkątów ABC i DEP (w skali $|CC'| : |PC'|$) i z nierówności $|AB| > |CC'|$ wnosimy, że $|DE| > |PC'|$. Dodajac otrzymane nierówności otrzymujemy

$$|AB| = |AD| + |DE| + |EB| > |PB'| + |PC'| + |PA'|.$$

172. Zauważmy najpierw, że jeśli $x_n > 1/\mathrm{e}$, to także

$$x_{n+1} \geq \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}}\left(\mathrm{e}^{1/n} - \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Zatem podany wzór rekurencyjny nie traci sensu (podstawy potęg są dodatnie) i określa ciąg o wyrazach $x_n > 1/\mathrm{e}$.

Wykażemy, że ciąg (x_n) jest malejący. Niech

$$f(x,y) = \frac{1}{y}\left(x^{1-y} - x\right) \quad \text{dla} \quad x, y > 0.$$

Nierówność $x_{n+1} < x_n$ jest (jak nietrudno sprawdzić) równoważna temu, że

$$(1) \qquad f\left(x_n, \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Relację (1) udowodnimy przez indukcję. Dla $n = 1$ jest $f(1,1) = 0$. Załóżmy, że (1) zachodzi dla pewnego n (a więc $x_{n+1} < x_n$) i przypuśćmy, że dla $n+1$ analogiczna nierówność nie zachodzi:

$$(2) \qquad f\left(x_{n+1}, \frac{1}{n+1}\right) \geq \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Różniczkując funkcję f względem obu zmiennych stwierdzamy, że

$$\frac{\partial f}{\partial x} < 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} > 0 \qquad \text{dla} \qquad \begin{cases} 1/\mathrm{e} < x < 1 \\ 0 < y < 1 \end{cases}$$

Z (2) otrzymujemy więc

$$(3) \qquad f\left(x_{n+1}, \frac{1}{n}\right) > \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

Wobec (1) i (3) istnieje liczba z, dla której $f\left(z, \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\mathrm{e}}$, przy czym $x_{n+1} < z < x_n$. Stąd

$$nz > nx_{n+1} = nx_n^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{\mathrm{e}} > nz^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{\mathrm{e}} = $$
$$= f\left(z, \frac{1}{n}\right) + nz - \frac{1}{\mathrm{e}} = nz.$$

Otrzymana sprzeczność kończy krok indukcyjny i dowodzi nierówności (1) dla $n = 1, 2, 3, \ldots$ (czyli monotoniczności ciągu (x_n)).

Istnieje zatem granica $s = \lim x_n \geq 1/\mathrm{e}$.

Oznaczmy: $x_n^n = y_n$.

Zachodzi równość

$$(4) \qquad \frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n}\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n, \ \text{gdzie } t_n = n\mathrm{e}x_n^{1-\frac{1}{n}}.$$

Ponieważ $t_n \to \infty$, $\quad t_n/n \to \mathrm{e}s$, to

$$\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^n = \left(\left(1 - \frac{1}{t_n}\right)^{t_n}\right)^{n/t_n} \to \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}s}}.$$

Wobec tego, zgodnie z (4),

$$s = \lim x_n = \lim \sqrt[n]{y_n} = \lim \frac{y_{n+1}}{y_n} = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}s}},$$

czyli

$$(5) \qquad s^s = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^{1/\mathrm{e}}.$$

Funkcja $\varphi(x) = x^x$ osiąga w punkcie $1/\mathrm{e}$ (i tylko w tym punkcie) swoją wartość minimalną. Zatem jedynym rozwiązaniem równania (5) jest liczba $s = 1/\mathrm{e}$. Jest to szukana granica.

Klub 44

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

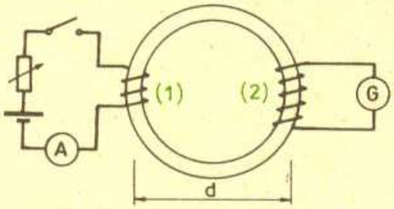
Zadania z fizyki nr 73, 74

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 1988

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

73. Na krawędzi stołu o wysokości H kładziemy kulkę o promieniu R ($R \ll H$). Kulka zaczyna się zsuwać ze stołu bez tarcia. W jakiej odległości od stołu upadnie ona na podłogę ?

74. Dlaczego patrząc na rząd lamp na ulicy odnosimy wrażenie, że wszystkie są jednakowo jasne, chociaż znajdują się w różnej odległości od nas ? Dlaczego reguła ta nie stosuje się do gwiazd o takiej samej jasności powierzchniowej, położonych w różnych odległościach od Ziemi ?



Rys.1

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 5/1988

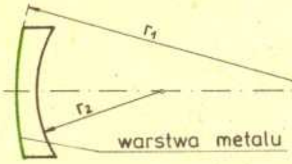
Przypominamy treść zadań:

69. W okularach krótkowidza przednia – wypukła powierzchnia wypukło-wklęsłych soczewek o zdolności skupiającej -4 D została pokryta cienką warstwą metaliczną, umożliwiającą widzenie do tyłu równie ostre jak przez okulary. Jakie są promienie krzywizny obu powierzchni soczewek ? Czy istnieje możliwość podobnego udoskonalenia okularów dalekowidza ?

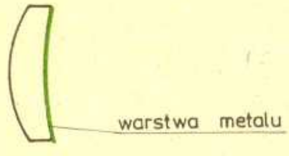
70. Na pierścieniowym rdzeniu z miękkiego ferromagnetyka nawinięto dwie cewki (rys.1). Cewkę (1) połączono z regulowanym źródłem prądu, cewkę (2) z galwanometrem balistycznym. Podczas włączania w obwodzie cewki (1) prądu o natężeniu I galwanometr wykazywał przepływ ładunku Q:

I (mA)	3	5	10	20	50	100	200	500
Q (μC)	10	30	130	450	700	860	920	1000

Wyznaczyć względną przenikalność magnetyczną materiału rdzenia w zależności od natężenia pola magnetycznego i przedyskutować otrzymane wyniki. Średnica pierścienia wynosi $d = 10$ cm, pole przekroju rdzenia – $S = 1$ cm^2, liczby zwojów: cewki (1) – $n_1 = 314$, cewki (2) – $n_2 = 2400$, całkowity opór obwodu cewki (2) – $R = 380\ \Omega$.



Rys.2



Rys.3

69. Zdolność skupiająca soczewki przedstawionej na rysunku 2 wyraża się wzorem

(1) $$N = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

gdzie f – ogniskowa soczewki, r_1 i r_2 – promienie krzywizny obu jej powierzchni, n – współczynnik załamania szkła. Promienie odbijające się od warstwy metalicznej (zwierciadło wklęsłe) w kierunku oka przechodzą dwukrotnie przez soczewkę. Zdolność skupiająca tego układu, składającego się z dwóch soczewek o zdolności skupiającej N i zwierciadła wklęsłego o promieniu krzywizny r_1, wynosi $2N + 1/f_z$, gdzie $f_z = r_1/2$ jest ogniskową zwierciadła. Zdolność skupiająca tego układu ma być równa N. Stąd wynika

(2) $$r_1/r_2 = (n+1)/(n-1).$$

Z (1) i (2) otrzymujemy $r_1 = -2f$, $r_2 = -2f(n-1)/(n+1)$. Dla $N = -4$ D ($f = -25$ cm oraz $n = 1,53$) odpowiednie wartości promieni krzywizny wynoszą $r_1 = 50$ cm, $r_2 = 10$ cm. Podobnie działające szkła dalekowidza wyglądałyby jak na rysunku 3.

70. Podczas zamykania obwodu cewki (1) w cewce (2) indukuje się siła elektromotoryczna

$$E = n_2 \frac{d\Phi}{dt}$$

(Φ – strumień wektora indukcji magnetycznej w rdzeniu), powodująca przepływ prądu o natężeniu $I_2 = E/R$. Całkowity ładunek, który przepływa przez obwód cewki (2) w tym procesie, jest równy

(1) $$Q = n_2\Phi/R,$$

gdzie Φ jest strumieniem wektora indukcji magnetycznej w rdzeniu dla ustalonego natężenia prądu I w cewce (1). Wartość tego strumienia wyznaczamy przy założeniu, że linie sił pola magnetycznego nie wychodzą z rdzenia. Długość tych linii wynosi πd, wobec tego z prawa Ampère'a otrzymujemy wartość natężenia pola magnetycznego

(2) $$H = n_1 I/\pi d.$$

Wartość wektora indukcji magnetycznej, określona zależnością

(3) $$B = \mu_0 \mu_r H$$

(μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni, μ_r – względna przenikalność magnetyczna rdzenia), jest zatem równa

(4) $$B = \frac{n_1 \mu_0 \mu_r I}{\pi d}.$$

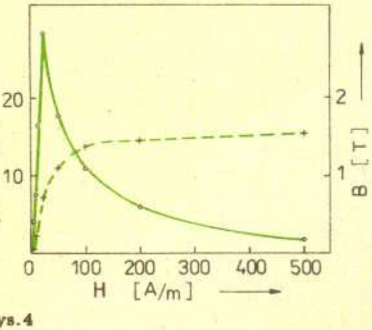
Csołówka ligi sadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen roswiąsań
sadań 63 /WT=3,10/ i 64 /WT=2,27/
s numeru 2/1988

Bogusław Mákielewics	– Brodnica	42,96pkt
Piotr Bała	– Toruń	34,84pkt
Roman Musiał	– Katowice	27,22pkt
Piotr Kocsyński	– Warssawa	26,80pkt
Paweł Perkowski	– Sscsecin	26,68pkt
Wiesław Kacprsak	– Kraków	25,61pkt
Aleksander Surma	– Myssków	20,87pkt
Robert Repucha	– Gołdap	20,70pkt

Ponieważ $\Phi = BS$, ze wzorów (1) i (4) otrzymujemy
$$Q = \frac{n_1 n_2 \mu_0 \mu_r S I}{\pi d R}.$$
Stąd wyznaczamy

(5)
$$\mu_r = \frac{\pi d R Q}{n_1 n_2 \mu_0 S I}.$$
Wykorzystując wzory (2), (5) i podstawiając $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6}$ N·A^{-2} obliczamy pary wartości H, μ_r odpowiadające podanym wartościom pomiarowym I, Q:

H (A/m)	3	5	10	20	50	100	200	500
μ_r	4 200	7 600	16 400	28 400	17 600	10 800	5 800	2 500



Rys.4

Charakter zależności $\mu_r(H)$ widać najlepiej na wykresie (rys.4): początkowo μ_r silnie (w przybliżeniu liniowo) rośnie ze wzrostem H, a następnie maleje. Na wykresie przedstawiono dodatkowo zależność wartości wektora indukcji B w rdzeniu (obliczonej ze wzoru (3)) od natężenia pola H (linia przerywana) – ma ona kształt typowy dla ferromagnetyka, dążąc do nasycenia. Za przebieg zjawiska są odpowiedzialne mikroskopowe procesy przesuwania granic domen magnetycznych oraz obrotów wektora namagnesowania poszczególnych domen (w silnych polach H).

KĄCIK PRAC uczniowskich

Rozważmy następujący problem: przypuśćmy, że dysponujemy wagą szalkową bez odważników, na której możemy wykonać n ważeń. Mamy k kul ($k \geq 3$), o których wiadomo, że co najwyżej jedna spośród nich różni się wagą od pozostałych – jest lżejsza lub cięższa. Naszym zadaniem jest ustalenie: czy taka kula rzeczywiście istnieje, znalezienie jej i określenie, czy jest lżejsza czy cięższa. Pytanie brzmi następująco: jakie jest największe k, dla którego zadanie jest wykonalne ?

Oszacowanie narzuca się od razu: n ważeń może dać co najwyżej 3^n wyników, a możliwych sytuacji (każda z kul może być lżejsza, cięższa, lub wszystkie mogą mieć tę samą wagę) jest $2k + 1$, stąd
$$2k + 1 \leq 3^n, \quad \text{co daje} \quad k \leq \frac{3^n - 1}{2}.$$
Okazuje się jednak, że dla $k > \frac{3^n - 3}{2}$ jest to zadanie niewykonalne. Aby to pokazać, rozpatrzmy dwa przypadki:

1) W pierwszym ważeniu na szalki kładziemy po $r \leq \frac{3^{n-1}-1}{2}$ kul. Wówczas, w przypadku równowagi, w następnych $n - 1$ ważeniach będziemy musieli rozstrzygnąć, która z $2(k - 2r) + 1$ możliwości (każda spośród nie ważonych kul może być lżejsza, cięższa bądź wszystkie równe) zachodzi. No, ale $n - 1$ ważeń daje tylko 3^{n-1} rozstrzygnięć, a $2(k - 2r) + 1 > 2\left(\frac{3^n-3}{2} - 2\left(\frac{3^{n-1}-1}{2}\right)\right) + 1 \geq 3^{n-1}$.

2) W pierwszym ważeniu na szalki położymy po $r \geq \frac{3^{n-1}+1}{2}$ kul. Wówczas w przypadku nierównowagi następne $n - 1$ ważeń musiałoby rozstrzygnąć, która z $2r$ możliwości (każda kula z jednej szalki może być cięższa, a z drugiej lżejsza) zachodzi. Ale $2r \geq 2\frac{3^{n-1}+1}{2} > 3^{n-1}$ – źle !

Z drugiej strony dla $k = \frac{3^n-3}{2}$ zadanie jest wykonalne: ponumerujmy kule liczbami od 1 do $\frac{3^n-3}{2}$. W k-tym ważeniu, w zależności od tego, czy numer kulki ma w zapisie trójkowym na k-tej pozycji 0 czy 2, kładziemy ją na lewej bądź prawej szalce (jeżeli 1, to nie kładziemy na żadnej).

Niech teraz $r = \sum_{i=0}^{n-1} 3^i w_{i+1}$, gdzie:
$$w_i = \begin{cases} 0, & \text{jeżeli w } i\text{-tym ważeniu lewa szalka przeważyła,} \\ 2, & \text{jeżeli w } i\text{-tym ważeniu prawa szalka przeważyła,} \\ 1, & \text{jeżeli była równowaga.} \end{cases}$$
Jeżeli $r < \frac{3^n-1}{2}$, to cięższą od pozostałych jest kula o numerze r. Jeżeli $r = \frac{3^n-1}{2}$, to ciężary wszystkich kul są równe. Jeżeli $r > \frac{3^n-1}{2}$, to lżejszą od pozostałych jest kula o numerze $3^n - 1 - r$.

W związku z powyższym zadaniem (jak widać – w pełni rozwiązanym) nasuwa się problem: co będzie, gdy pozwolimy, by mogły być 2 kule „fałszywe". Jaka będzie wtedy największa liczba k, dla której zadanie jest wykonalne ? Należy wówczas sprecyzować treść: np. zdecydować się czy dopuszczamy, aby kule „fałszywe" różniły się wagą itp. A co będzie, gdy pozwolimy trzem kulom być kulami „fałszywymi" ? Zachęcam do zajęcia się tym tematem.

Powodzenia !

Michał WOJCIECHOWSKI

Rozwiązanie zadania F 252.
Ponieważ ciecz nie zwilża szkła, to w otworze zacznie się tworzyć kulisty bąbelek cieczy. Ciśnienie, jakie wywiera warstwa powierzchniowa takiego bąbelka, którego promień r przyjmujemy za (w przybliżeniu) równy promieniowi otworka (rys.), jest skierowane do wewnątrz i wynosi $p = 2\sigma/r$, gdzie σ oznacza wartość napięcia powierzchniowego cieczy.

Fakt proporcjonalności p do σ/r łatwo można wywnioskować z analizy wymiarowej. Ponieważ wymiar napięcia powierzchniowego σ jest równy $[\sigma]$=N/m, to jedynym wyrażeniem mającym wymiar ciśnienia – N/m^2, utworzonym z wielkości charakteryzujących bąbelek (tj. σ i r) jest właśnie iloraz σ/r. Ogólnie ciśnienie pod zakrzywioną powierzchnią cieczy określa tzw. prawo Laplace'a $p = p_0 + \sigma(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})$, gdzie p_0 jest ciśnieniem w przypadku płaskiej powierzchni, a R_1 i R_2 określają główne promienie krzywizny; w przypadku kuli $R_1 = R_2 = r$. Dopóki siła ciśnienia wywieranego przez bąbelek będzie większa od działającego w dół parcia cieczy $\rho g h$ (ρ – gęstość cieczy, h – wysokość słupa cieczy), dopóty ciecz nie będzie się wylewać z pojemnika. Warunek ten możemy zapisać w postaci
$$\frac{2\sigma}{r} \geq \rho g h, \quad \text{skąd} \quad h \leq \frac{2\sigma}{r\rho g}.$$