Kilka spojrzeń na sferę trójwymiarową

Dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA

Wiele figur w matematyce jest nam świetnie znanych; przyzwyczailiśmy się do nich. Wydawałoby się, że nie można o nich powiedzieć nic więcej – nic nowego ani ciekawego. Tymczasem przy bliższej analizie ukazują się niezwykłe i zaskakujące własności badanych tworów.

„Weźmy pod lupę" jeden z takich zbiorów. Jest nim sfera – dokładniej sfera trójwymiarowa. Wszyscy wiemy, co to jest sfera dwuwymiarowa: powierzchnia kuli, zbiór punktów przestrzeni jednakowo oddalonych od pewnego punktu ustalonego, nazwanego środkiem. Ta definicja bez problemu przenosi się na wyższe wymiary. Czyli: sferą n-wymiarową o środku P i promieniu r jest zbiór punktów przestrzeni $(n+1)$-wymiarowej, których odległość od P wynosi r. Gdy mówimy o odległości, to mamy na myśli tę naturalną, euklidesową.

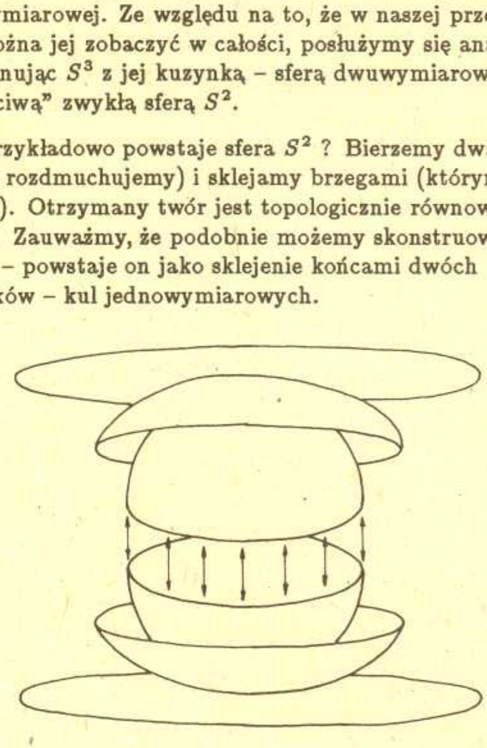
Z punktu widzenia topologii nie ma znaczenia, jaki jest promień sfery ani w którym miejscu przestrzeni znajduje się środek. Ważne jest jedynie, by zbiór był homeomorficzny (topologicznie równoważny) ze sferą. Dla uproszczenia więc badamy sferę o środku w $(0,\cdots,0)$ i promieniu 1. Możemy zatem zapisać:

$$S^n = \left\{(x_1,\cdots,x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\right\}.$$

Nas interesuje „sfera trójwymiarowa", tj. S^3. Słowo „trójwymiarowa" mogłoby sugerować, że można ją sobie łatwo wyobrazić lub narysować – przecież nasza intuicja pracuje w trzech wymiarach ! Niestety tak nie jest. Zgodnie z definicją S^3 jest podzbiorem przestrzeni czterowymiarowej, a więc postać naszego tworu wcale nie jest taka prosta.

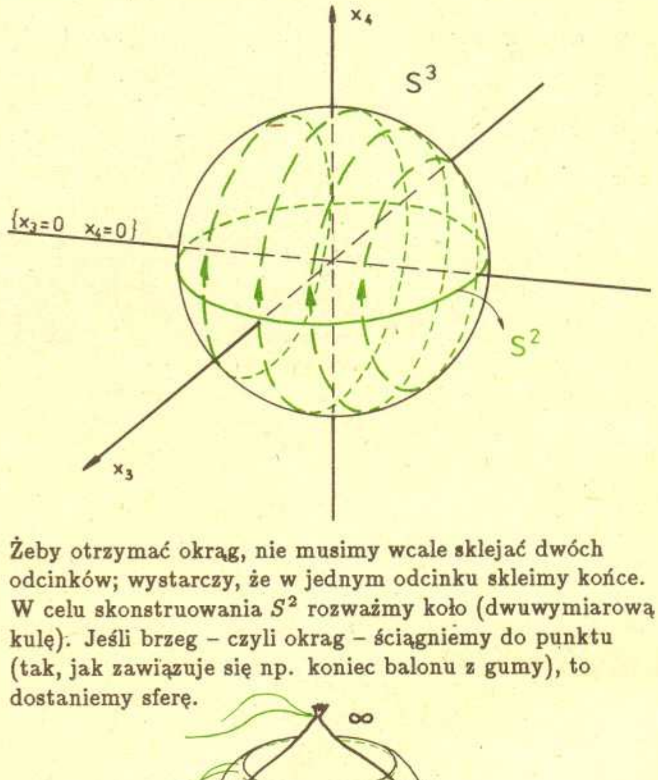
Podamy kilka opisów i przepisów na konstrukcję sfery trójwymiarowej. Ze względu na to, że w naszej przestrzeni nie można jej zobaczyć w całości, posłużymy się analogią, porównując S^3 z jej kuzynką – sferą dwuwymiarową, czyli „poczciwą" zwykłą sferą S^2.

Jak przykładowo powstaje sfera S^2 ? Bierzemy dwa koła (nieco rozdmuchujemy) i sklejamy brzegami (którymi są okręgi). Otrzymany twór jest topologicznie równoważny sferze. Zauważmy, że podobnie możemy skonstruować okrąg – powstaje on jako sklejenie końcami dwóch odcinków – kul jednowymiarowych.

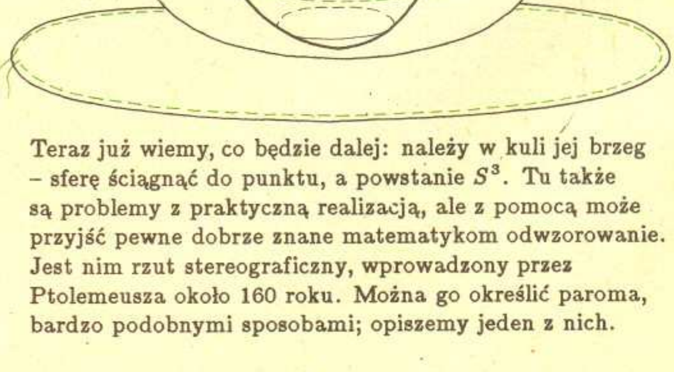


A w przypadku S^3 ? Jeśli dwie kule skleimy brzegami (czyli dwuwymiarowymi sferami), to otrzymamy sferę trójwymiarową. Trudno sobie jednak to wyobrazić.

Może więc tak: S^2 dostajemy w wyniku obracania okręgu S^1 dookoła jednej z jego osi symetrii. Wobec tego S^3 powinno powstać, gdy sferę S^2 obrócimy wokół jednej z jej płaszczyzn symetrii (ta płaszczyzna jest zbiorem punktów stałych w tym obrocie !). Przypuśćmy, że obracamy naszą sferę „dookoła" płaszczyzny $\{(x_1,x_2,0,0) : x_1,x_2 \in \mathbf{R}\}$. Wtedy obrazem punktu $(x_1,x_2,x_3,0)$ należącego do S^2 będzie punkt $(x_1,x_2,x_3\cos\alpha,x_3\sin\alpha)$, dla pewnego $\alpha \in [0,2\pi)$, który, oczywiście, jest elementem S^3. Czy przemawia to do intuicji ?



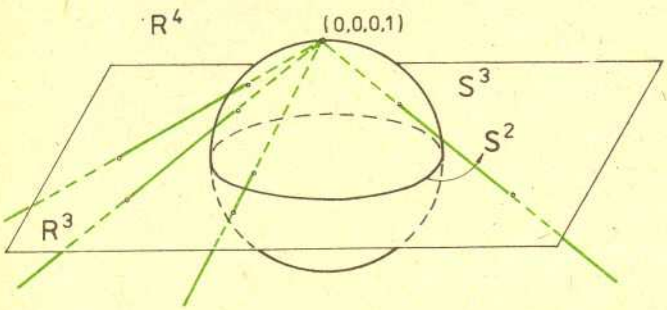
Żeby otrzymać okrąg, nie musimy wcale sklejać dwóch odcinków; wystarczy, że w jednym odcinku skleimy końce. W celu skonstruowania S^2 rozważmy koło (dwuwymiarową kulę). Jeśli brzeg – czyli okrąg – ściągniemy do punktu (tak, jak zawiązuje się np. koniec balonu z gumy), to dostaniemy sferę.



Teraz już wiemy, co będzie dalej: należy w kuli jej brzeg – sferę ściągnąć do punktu, a powstanie S^3. Tu także są problemy z praktyczną realizacją, ale z pomocą może przyjść pewne dobrze znane matematykom odwzorowanie. Jest nim rzut stereograficzny, wprowadzony przez Ptolemeusza około 160 roku. Można go określić paroma, bardzo podobnymi sposobami; opiszemy jeden z nich.

Przypomnijmy, że S^2 jest sferą o środku w zerze i promieniu 1. Wybierzmy płaszczyznę przechodzącą przez 0. W prostokątnym układzie współrzędnych może to być płaszczyzna o równaniu $z = 0$. Z punktu (0,0,1) – bieguna S^2 prowadzimy proste. Jeśli nie są one równoległe do płaszczyzny, to przecinają zarówno sferę, jak i płaszczyznę – w obu przypadkach w dokładnie jednym punkcie ! Punktom sfery (bez bieguna północnego) odpowiadają wzajemnie jednoznacznie punkty płaszczyzny. Gdyby nie ten biegun, to przekształcenie byłoby bardzo porządne. Gdyby tak do płaszczyzny dołączyć jeszcze jeden punkt ... Właśnie, dodanie do płaszczyzny punktu, nazwanego „punktem w nieskończoności", uczyni ją topologicznie identyczną ze sferą. Odwzorowaniem określającym tę identyfikację jest rzut stereograficzny. Jest to dokładnie taka sama sytuacja jak w przypadku, gdy ściągaliśmy brzeg koła. Teraz „zwijamy" płaszczyznę i „w nieskończoności zlepiamy w jeden punkt".

Podobne przekształcenie możemy zdefiniować dla sfer dowolnego wymiaru.



Przytoczmy wzory dla S^3

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \to \left(\frac{x_1}{1-x_4}, \frac{x_2}{1-x_4}, \frac{x_3}{1-x_4}\right).$$

Przekształcenie odwrotne określone jest następująco

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \to \left(\frac{2\xi_1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{2\xi_2}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{2\xi_3}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}, \frac{\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2-1}{1+\xi_1^2+\xi_2^2+\xi_3^2}\right).$$

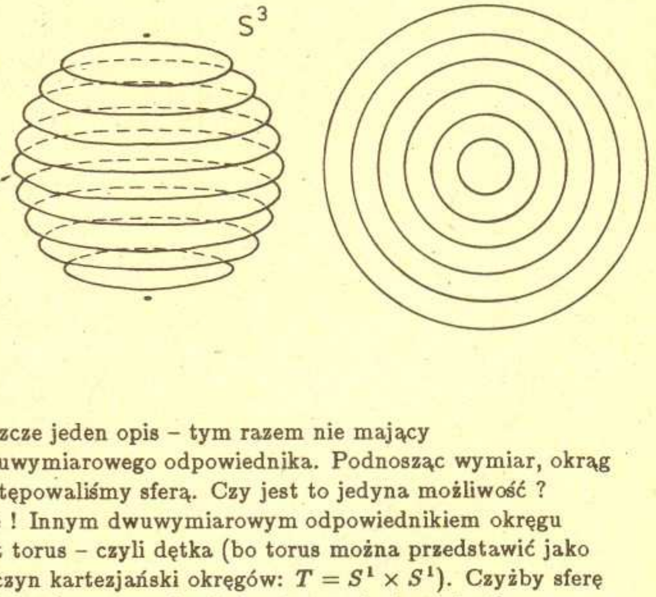
Zatem sfera trójwymiarowa jest to przestrzeń $\mathbf{R}^3$ uzupełniona punktem w nieskończoności. Wystarczy do naszej przestrzeni dołączyć (w odpowiedni sposób) jeden punkt, aby otrzymać S^3.

Na zwykłej sferze: jeśli wokół ustalonego punktu zaczniemy kreślić okręgi, to, oczywiście, promienie ich będą rosły, ale tylko do pewnego momentu – gdy osiągną promień sfery. Potem znów będą maleć. Podobnego efektu należy oczekiwać w S^3. Gdy wokół dowolnego punktu zaczniemy konstruować sfery (typu S^2), to będziemy – oczywiście – przy każdej następnej sferze zużywać coraz więcej materiału. W pewnym momencie ze zdziwieniem stwierdzimy, że mimo iż sfery przez nas budowane obejmują poprzednie, to zużywamy coraz mniej materiału – maleje ich promień. W $\mathbf{R}^3$ jest to niemożliwe ! Rozsądnie jest promień tej największej sfery nazwać promieniem S^3.

Jest tak, jak w przypadku S^2; porównując współśrodkowe okręgi leżące blisko siebie nie zauważymy nieznacznego zakrzywienia sfery. Analogicznie: zakrzywienie S^3 powoduje, że odpowiednie sfery dwuwymiarowe nie zamykają w sobie sfer poprzednich, ale są nieznacznie „obok". Oczywiście dzieje się to w $\mathbf{R}^4$, zatem trudno jest to sobie wyobrazić. Ale – podsumowując – S^3 to tak, jakby wykrzywiona, zagięta przestrzeń z dolepionym punktem.

Spróbujmy to opisać jeszcze inaczej. Wędrowiec udający się przed siebie, w dowolnym kierunku na S^2, po pewnym czasie wróci do punktu wymarszu. Na sferze trójwymiarowej bedzie tak samo ! Gdyby wędrowiec w S^3 ruszył w jednym kierunku i szedł nie zmieniając go, to w końcu doszedłby do miejsca, z którego wyszedł – pod warunkiem, że żyłby wystarczająco długo.

Jeśli przetniemy sferę S^2 płaszczyzną, to otrzymamy okręgi lub w granicznych przypadkach – punkty. Natomiast przecinając sferę S^3 przestrzenią $\mathbf{R}^3$, dostaniemy normalną dwuwymiarową sferę. Gdy S^3 będzie zmieniać położenie, to jej ślady będą się zmniejszać lub zwiększać. Nigdy jednak promienie sfer dwuwymiarowych nie przekroczą promienia S^3. Przekonać się o tym można, ustalając jedną ze zmiennych we wzorze opisującym sferę trójwymiarową. Dostaniemy wzór na sferę dwuwymiarową. Przy zmianie parametru (czwartej współrzędnej) zmieniać się będzie promień sfery dwuwymiarowej. Mając ślady S^3 na $\mathbf{R}^3$ (jakby poziomice) można sobie wyrobić pewien pogląd na całą sferę. Błędem byłoby jednak porównywanie sfery trójwymiarowej z cebulą, gdyż S^3 nie jest zbudowana z koncentrycznych warstw – sfer. Ich środki przesuwają się w kierunku czwartego wymiaru. Przyczyną tego jest owo wykrzywienie, o którym już wspominaliśmy. Podobnie okręgi koncentryczne nie utworzą sfery dwuwymiarowej; trzeba środki tych okręgów poprzesuwać w trzecim wymiarze.

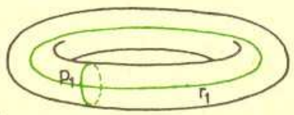


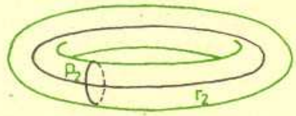
Jeszcze jeden opis – tym razem nie mający dwuwymiarowego odpowiednika. Podnosząc wymiar, okrąg zastępowaliśmy sferą. Czy jest to jedyna możliwość ? Nie ! Innym dwuwymiarowym odpowiednikiem okręgu jest torus – czyli dętka (bo torus można przedstawić jako iloczyn kartezjański okręgów: $T = S^1 \times S^1$). Czyżby sferę trójwymiarową można było utworzyć z torusów ?

Przepis jest następujący: „Weź dwa pełne torusy. Sklej je brzegiem, ale w taki sposób, by równoleżniki jednego torusa przyklejać do południków drugiego, a południki do równoleżników. Jeśli to zrobisz, otrzymasz sferę trójwymiarową."

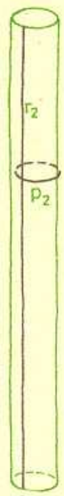
Czy coś takiego można sobie wyobrazić ? Spróbujmy. Weźmy dwa pełne torusy T_1 i T_2. Narysujmy na każdym z nich równoleżnik i południk. Oznaczmy je odpowiednio: r_1, p_1 i r_2, p_2. Rozetnijmy T_2 wzdłuż jednego z południków (różnego od p_2) i przewleczmy przez (naturalną) dziurę w T_1. Możemy przyjąć, że pełny torus T_2 jest zbudowany z warstw – zwykłych torusów dwuwymiarowych. W samym „centrum" jest okrąg (po którym porusza się środek koła generującego pełny torus). Po rozcięciu mamy pełny cylinder – rodzinę powierzchni cylindrycznych. Zacznijmy teraz sklejać brzegi każdej z tych powierzchni, wywijając je na zewnątrz wokół torusa T_1. Otrzymamy rodzinę torusów obejmujących T_1.

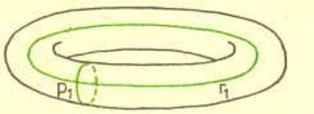
Zauważmy, że po takiej operacji na brzegu T_2 równoleżnik r_2 stał się południkiem, a południk p_2 równoleżnikiem. Więcej, wszystkie południki stały się równoleżnikami i odwrotnie. Można już bez przeszkód sklejać odpowiednie równoleżniki i południki. Pozostał jeden problem – odcinek centralny powstały po rozcięciu okręgu. Jeśli do $\mathbf{R}^3$ dołożymy punkt w nieskończoności, to końce tego odcinka możemy połączyć właśnie w tym punkcie. Ale to jest przecież S^3 ! Rozcięty torus odzyskał swoją postać, tylko jest teraz przenicowany.



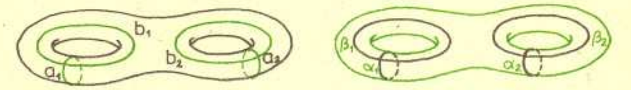


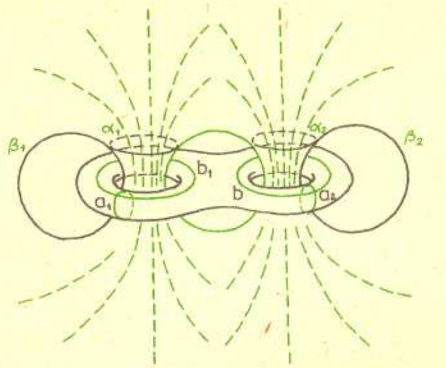
Parafrazując nasz przepis możemy powiedzieć: gdy wytniemy pełny torus z S^3, wówczas to, co pozostanie, jest homeomorficzne także z pełnym torusem.

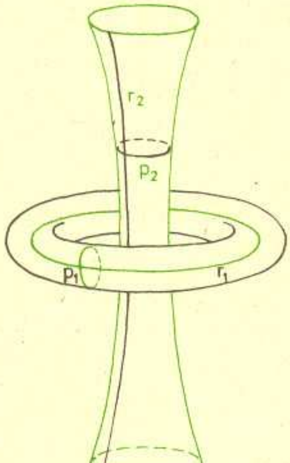


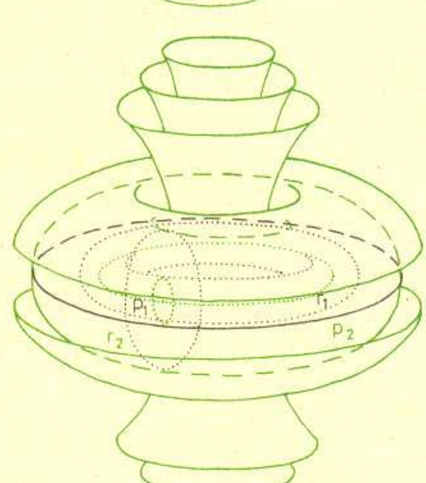


Sferę trójwymiarową można opisać na wiele innych i to znacznie bardziej skomplikowanych sposobów. Na przykład: S^3 jest wynikiem sklejenia dwóch podwójnych, pełnych torusów – precelków; równoleżniki na brzegu jednego precla sklejamy z południkami drugiego i odwrotnie.









Można też sklejać jeszcze bardziej zawiłe figury, takie jak precle z wieloma dziurkami. Ponadto sklejenia mogą być przeprowadzone nie wzdłuż południków i równoleżników, ale wzdłuż bardziej zawiłych krzywych. Musimy jednak przy tym bardzo uważać, gdyż wynik sklejenia może być skrajnie różny od oczekiwanego (nawet zlepianie torusów na ogół nie daje sfery). Więcej, nie jest znana ogólna recepta, dzięki której moglibyśmy przed klejeniem dowiedzieć się, co otrzymamy. Przydałoby się wiele twierdzeń typu: „jeśli figura ma takie to a takie własności, to jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową".
Dzięki nim dużo łatwiej moglibyśmy przewidzieć wyniki skomplikowanych operacji. Można to porównać do pieczenia ciasta: metoda, według której kleimy, to nic innego, jak konkretny przepis. Niestety – przepisów, za pomocą których dostajemy konkretne ciasto (u nas: sferę trójwymiarową), w książce kucharskiej matematyków jest stanowczo za mało.