Trudne zadanie w Klubie 44...

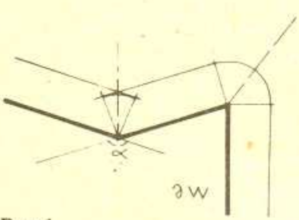
... było już niejedno. Ale tym razem trudność okazała się większa niż zwykle, a przy tym stało się to w sposób niezamierzony. Przypomnijmy pokrótce, o co chodzi.

Zadanie nr 157 ligi zadaniowej zostało zaczerpnięte z pewnego zbioru zadań. Podane w tym zbiorze rozwiązanie było nieprecyzyjne, ale wyglądało przekonująco; dopiero przy próbie ścisłego zredagowania okazało się niepoprawne. A próby usunięcia luki ujawniły faktyczną trudność zadania. Numer *Delty* był już wydrukowany, na zmianę zadania było za późno. W gronie redakcyjnym, przy współpracy innych matematyków z UW (Rafał Sztencel, Witold Szczechla) udało się dopracować dowód (dość zawiły, ale mamy nadzieję, że poprawny), który poniżej zaprezentujemy (zgodnie z obietnicą daną w numerze 2/1988). Dlaczego nie wcześniej ? Czekaliśmy: a nuż ktoś z uczestników ligi znajdzie dowód prostszy. Niestety; wśród niewielu rozwiązań, które wpłynęły, nie było ani jednego w pełni poprawnego...

Zadanie było takie: Wielokąt W ma pole S i obwód d. Dowieść, że W zawiera koło o promieniu $> S/d$.

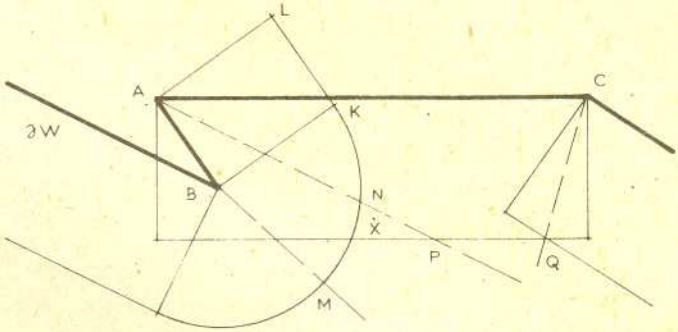
A rozwiązanie w zbiorze zadań – takie: przypuśćmy, że nie istnieje koło o promieniu r zawarte w W. Wówczas każdy punkt wielokąta W jest odległy nie więcej niż o r od brzegu. To znaczy, że jeśli weźmiemy paski szerokości r wzdłuż każdego boku, to one (w zasadzie) pokryją W. Problem pojawia się przy wierzchołkach, gdzie trzeba dokonać staranniejszej kalkulacji. Mianowicie, jeśli mamy bok od A do B, budujemy nie pasek, ale zbiór punktów odległych o nie więcej niż r od AB i leżących pomiędzy dwusiecznymi kątów A i B. Pole tego zbioru równa się $r \cdot$ (długość AB) + (dwa przyczynki przy końcach). Jeśli kąt przy wierzchołku (np. A) jest $< \pi$, musimy odjąć trójkąt prostokątny o wysokości r i kącie $A/2$; ma on pole większe niż zawarty w nim wycinek koła o polu $(r^2/4)(\pi - A)$. Jeśli kąt przy wierzchołku (np. B) jest $\geq \pi$, musimy dodać wycinek koła o rozwartości kątowej $(B-\pi)/2$, o polu $(r^2/4)(B-\pi)$. Łącznie więc, pełna powierzchnia tych zbiorów jest ograniczona przez $r \cdot$ (obwód) $- (r^2/2)$(suma kątów zewnętrznych) $= r \cdot$ (obwód)$-$ $-\pi r^2$, a ponieważ z założenia suma tych zbiorów zawiera cały wielokąt, widzimy, że (pole) $\leq r \cdot$ (obwód) $- \pi r^2$. Skoro to jest prawda dla wszystkich r przekraczających maksymalny promień koła wpisanego, więc S/d jest dolnym ograniczeniem długości tego promienia.

Gdzie błąd ? W cichym założeniu, że r jest małe w porównaniu z długością najkrótszego boku wielokąta; wtedy rzeczywiście jest dobrze (rys.1): paski są długie a wąskie, zachodzą na siebie małymi kawałkami przy końcach i nie ma kłopotów.



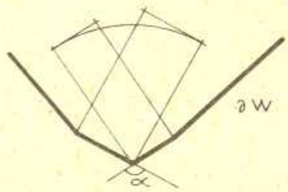
Rys.1

Ale na przykład w sytuacji z rysunku 2 „pasek" zbudowany na krótkim boku AB (czyli prostokąt $ABKL$), „zmodyfikowany" przy wierzchołkach A i B przez układ dwusiecznych kątów wielokąta, przybiera dość dziwny kształt $ABMN$. Ponieważ „pasek" przyporządkowany bokowi CA redukuje się do trapezu $CAPQ$, istnieją w wielokącie punkty (np. punkt X na rysunku) odległe o mniej niż r od brzegu, a nie należące do sumy otrzymanych figur.



Rys.2

Pewną odmianę tego rozumowania stanowiło stwierdzenie pojawiające się w pracach uczestników ligi: część wspólna prostokątów opartych na bokach będących ramionami kąta wewnętrznego o mierze $\alpha < \pi$ zawiera wycinek koła o promieniu równym szerokości prostokąta i o rozwartości kątowej $\pi - \alpha$ (rys.1). Ale: czy zawsze musi tak być ? W sytuacji przedstawionej na rysunku 3 zachodzi wręcz inkluzja przeciwna !



Rys.3

Cały problem bardzo się upraszcza, gdy wielokąt jest wypukły; wtedy wystarczy po prostu rozważać prostokąty wzdłuż boków, nie modyfikując ich przy wierzchołkach (i nie wprowadzać żadnych wycinków kół).

Jeśli natomiast wielokąt nie jest wypukły, to wówczas, jak zauważyliśmy, wszystko jest w powyższych rozważaniach dobrze pod warunkiem, że szerokość pasków jest mała. To spostrzeżenie podpowiada metodę dowodu: brać wąskie paski i zmniejszać wielokąt „po trochu", stosując argumenty podobne do przedstawionych wyżej. Jest to rozumowanie typu infinitezymalnego (bardzo wąskie paski dadzą bardzo drobne przyczynki, które potem trzeba zsumować...). Właściwy język do takich rozważań – to język pochodnych i całek. Okazuje się, że zadanie należy do analizy raczej, niż do geometrii.

Przejdźmy więc do dowodu.

Dla dowolnej liczby $r \geq 0$ określamy zbiór otwarty

$$W_r = \{P \in W : \quad \operatorname{dist}(P, \partial W) > r\},$$

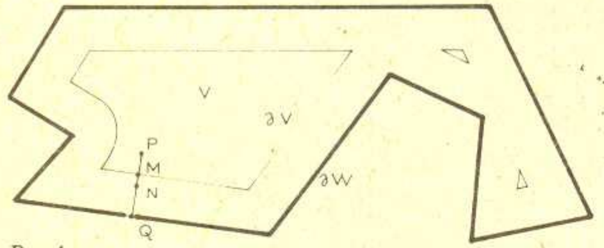
gdzie ∂W oznacza brzeg W,
a $\operatorname{dist}(P, \partial W) = \min\{|PQ| : Q \in \partial W\}$.
(Tak więc W_0 – to wnętrze wielokąta W.) Każdy punkt zbioru W_r jest środkiem koła o promieniu r zawartego w W_0. Niech $R = \sup\{r : W_r \neq \emptyset\}$. Zadanie sprowadza się do wykazania, że $R > S/d$.

Dla dowolnego zbioru C na płaszczyźnie zbiór punktów odległych od C nie mniej niż o r będziemy nazywać domkniętą r-otoczką C. Domknięta r-otoczka każdego boku wielokąta W jest sumą prostokąta o szerokości $2r$ i dwóch połówek kół o promieniu r przyklejonych do przeciwległych boków tego prostokąta (obwód takiej otoczki przypomina bieżnię lekkoatletyczną). Zbiór W_r powstaje przez usunięcie ze zbioru W_0 domkniętych r-otoczek wszystkich boków. Jest więc albo wielokątem krzywoliniowym o brzegu złożonym z odcinków oraz łuków okręgów o promieniu r (wypukłościami zwróconych ku wnętrzu W_r), albo sumą skończenie wielu składowych, z których każda jest takim wielokątem krzywoliniowym.

Lemat 1. Niech r i h będą liczbami dodatnimi. Niech V będzie jedną ze składowych zbioru W_r i niech $P \in V$. Wówczas:

$$\operatorname{dist}(P, \partial W) > r + h \Leftrightarrow \operatorname{dist}(P, \partial V) > h\,.$$

Dowód. Implikacja $\Rightarrow$ jest oczywista. Dla dowodu implikacji przeciwnej przypuśćmy, że $\operatorname{dist}(P, \partial V) > h$, ale $\operatorname{dist}(P, \partial W) \leq r + h$. Istnieje więc punkt $Q \in \partial W$ taki, że $|PQ| \leq r + h$ (rys.4). Odcinek PQ przecina brzeg V; oznaczmy punkt przecięcia przez M; jeśli jest ich więcej niż jeden, bierzemy punkt leżący najbliżej P. Oczywiście $|PM| > h$. Zatem $|MQ| = |PQ| - |PM| < r$. Przesuwając nieznacznie punkt M wzdłuż odcinka MP w stronę P dostajemy punkt N, dla którego nierówność $|NQ| < r$ też jest spełniona. Znaczy to, że $N \notin W_r$ – sprzeczność, bo $N \in V \subset W_r$.



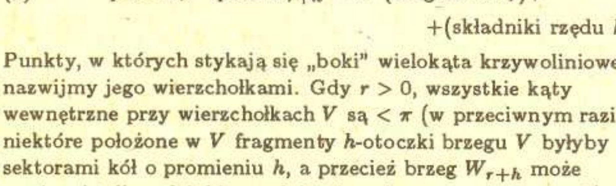
Rys.4

Udowodniony lemat mówi, że zawarta w V część zbioru W_{r+h} powstaje przez usunięcie z V domkniętej h-otoczki brzegu V. Jeśli h jest małe, to ta otoczka składa się z pasków prostoliniowych lub krzywoliniowych biegnących wzdłuż „boków" V (cudzysłów, bo to kawałki prostych lub okręgów), przy czym każdy z tych pasków ma punkty wspólne tylko z dwoma paskami sąsiednimi. Usuwając ze zbioru V sumę tych pasków dostajemy zbiór U będący składową zbioru W_{r+h}; tak więc W_{r+h} ma (dla małych h) tyle samo składowych, co W_r, zawartych po jednej w różnych składowych W_r.

Będziemy teraz zmniejszać h. Pole h-otoczki brzegu V (a raczej jej części zawartej w V) jest sumą pól pasków prosto- i krzywoliniowych o szerokości r zmniejszoną o sumę pól fragmentów, gdzie paski te zachodzą na siebie. Przy $h \to 0$ ta ostatnia suma jest wielkością rzędu h^2. Pole każdego paska prostokątnego biegnącego wzdłuż prostego boku V równa się $h \cdot$ (długość tego boku); dla pasków będących fragmentami pierścieni kołowych taka równość też zachodzi, z dokładnością do składników rzędu h^2. Uwzględniając wszystkie składowe, otrzymujemy:

$$\text{(1)} \qquad \text{pole } W_r - \text{pole } W_{r+h} = h \cdot (\text{długość } \partial W_r) + (\text{składniki rzędu } h^2).$$

Punkty, w których stykają się „boki" wielokąta krzywoliniowego, nazwijmy jego wierzchołkami. Gdy $r > 0$, wszystkie kąty wewnętrzne przy wierzchołkach V są $< \pi$ (w przeciwnym razie niektóre położone w V fragmenty h-otoczki brzegu V byłyby sektorami kół o promieniu h, a przecież brzeg W_{r+h} może zawierać tylko odcinki oraz łuki okręgów o promieniu $r + h$). Gdy h jest małe, „boki" U biegną wzdłuż „boków" V w małej odległości; wierzchołkom V odpowiadają wierzchołki U (rys.5).



Rys.5

Niech A będzie dowolnym wierzchołkiem U i niech A', A'' będą prostopadłymi rzutami punktu A na dwa bliskie mu boki V. Zastąpmy fragment obwodu V zawarty między A' i A'' przez łuk okręgu o środku A i promieniu h. Otrzymamy kontur gładki K, o długości mniejszej niż obwód V, składający się z łuków okręgów o promieniu r, o rozwartościach kątowych $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, z łuków okręgów o promieniu h, o rozwartościach kątowych $\beta_1, \ldots, \beta_l$, i z odcinków prostych. Łuki tych pierwszych okręgów są zwrócone wypukłością do wnętrza V, a tych drugich – na zewnątrz V. Zauważmy teraz, że

$$\text{długość } \partial V - \text{długość } \partial U > \text{długość } K - \text{długość } \partial U = \\ = \sum_i h\beta_i - \sum_j h\alpha_j = h\left(\sum_i \beta_i - \sum_j \alpha_j\right) = 2\pi h\,;$$

ostatnia równość wynika z tego, że suma w nawiasie jest miarą kąta pełnego zatoczonego przez wektor prędkości punktu obiegającego jednokrotnie kontur K. Uwzględniając wszystkie składowe otrzymujemy:

$$\text{(2)} \qquad \text{długość } \partial W_r - \text{długość } \partial W_{r+h} > \\ > 2\pi h \cdot (\text{liczba składowych } W_r) \geq 2\pi h.$$

Przyjmijmy oznaczenia: $F(r) = \text{pole } W_r$; $f(r) = \text{długość } \partial W_r$. Są to funkcje ciągłe na przedziale $\langle 0; R\rangle$, jeśli przyjmiemy $F(R) = 0$, $f(R) = 0$. Z relacji (1) i (2), słusznych dla $r \in (0; R)$ i dla małych $h > 0$ dostaniemy po podzieleniu przez h i przejściu do granicy ($h \to 0^+$):

$$\text{(3)} \qquad F'_+(r) = -f(r)\,; \quad \overline{f'_+}(r) \leq -2\pi \quad \text{dla } r \in (0; R)$$

(użyty w ostatniej nierówności symbol oznacza górną pochodną prawostronną funkcji f, czyli górną granicę prawostronną ilorazu różnicowego).

Lemat 2. Jeżeli G i g są funkcjami ciągłymi w przedziale $\langle 0; r\rangle$ i jeżeli $\overline{G'_+}(t) \leq g(t)$ dla $t \in (0; r)$, to

$$G(r) \leq G(0) + \int_0^r g(t)\,dt\,.$$

Dowód. Niech $c = r^{-1}(G(0) - G(r) + \int_0^r g(t)\,dt)$. Mamy wykazać, że $c \geq 0$. Przypuśćmy więc, że $c < 0$. Weźmy pod uwagę funkcję $H(t) = G(t) + ct - \int_0^t g(s)\,ds$. Jest ona ciągła na $\langle 0; r\rangle$, a ponadto $H(0) = H(r)$. Zatem H przyjmuje swą wartość maksymalną na $\langle 0; r)$ w pewnym punkcie $b \in (0; r)$. Zgodnie z założeniem lematu i z uczynionym przypuszczeniem,

$$\text{(4)} \qquad \overline{H'_+}(t) = \overline{G'_+}(t) + c - g(t) \leq c < 0 \quad \text{dla } t \in (0; r)\,.$$

Ponieważ $H(b) = \max H$, a $b > 0$, znajdzie się punkt $a \in (0; b)$ taki, że $H(a) < H(b)$ (inaczej H byłaby stała na $(0; b)$, co wobec (4) nie jest możliwe). Niech t_0 będzie punktem, w którym H osiąga minimum na $\langle a; b\rangle$. Wtedy $t_0 \in \langle a; b) \subset (0; r)$ oraz $H(t_0 + h) - H(t_0) \geq 0$ dla małych $h > 0$. Zatem $\overline{H'_+}(t_0) \geq 0$, wbrew (4). Ta sprzeczność kończy dowód lematu.

Ustalmy teraz $r \in (0; R)$ i zastosujmy Lemat 2 do funkcji $G(t) = f(t)$, $g(t) = -2\pi$ na przedziale $\langle 0; r\rangle$; założenia są spełnione, w myśl oszacowania (3) (z r zastąpionym przez t). Zatem $f(r) \leq f(0) - 2\pi r$.

Zastosujmy ponownie Lemat 2, traktując tym razem r jako zmienną, R – jako prawy koniec przedziału i przyjmując $G(r) = -F(r)$, $g(r) = f(0) - 2\pi r$ dla $r \in (0; R)$; zgodnie z (3), $G'_+(r) = -F'_+(r) = f(r) \leq g(r)$ dla $r \in (0; R)$, więc założenia lematu są spełnione. Dostajemy:

$$-F(R) \leq -F(0) + \int_0^R (f(0) - 2\pi r)\,dr = -F(0) + f(0)R - \pi R^2,$$

czyli $0 \leq -S + Rd - \pi R^2$ i ostatecznie $S < Rd$, o co chodziło.

Dowód twierdzenia danego w zadaniu jest tym samym zakończony.

dr Marcin E. KUCZMA