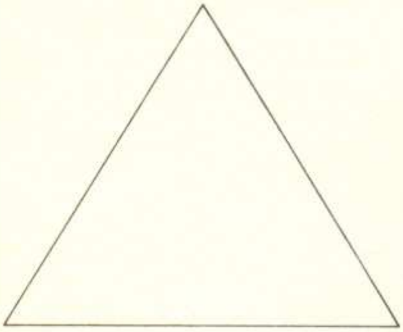
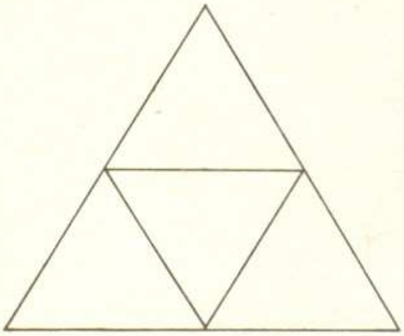
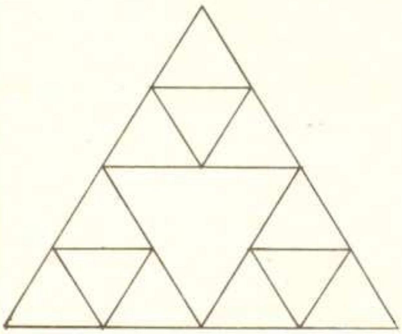
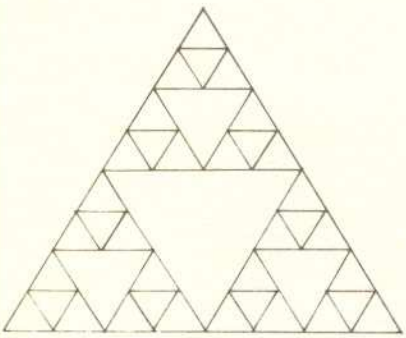
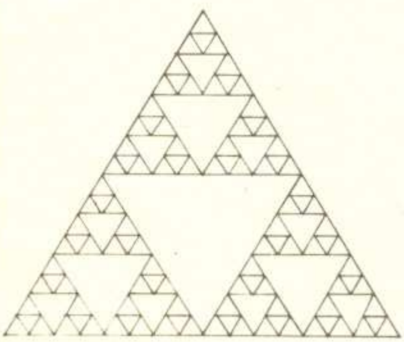
Sztywność figur











Wygięcie trójkątnego kawałka blachy nie nastręcza żadnych trudności. Kłopoty są wtedy, gdy zażądamy, żeby po wygięciu nasz kawałek nadal był płaski. Wydaje się, że na płaszczyźnie jest na to za mało miejsca, jest go jednak wystarczająco dużo, aby wygiąć sam brzeg trójkąta. Tak podpowiada intuicja, a jak jest naprawdę ? Zanim odpowiemy na to pytanie (i zadamy następne), musimy najpierw dokładnie wiedzieć, o czym mówimy – co to znaczy wygiąć ? Jeśli wyginamy drut, to zmieniamy kształt nie zmieniając jego długości, co więcej – nie zmieniamy długości żadnego kawałka. To spostrzeżenie wystarczy do precyzyjnej definicji wyginania.

Wygięciem (albo izometrią wewnętrzną) nazywamy takie przekształcenie figury F, które nie zmienia długości żadnej z narysowanych w F linii. Zatem linie narysowane (zawarte) w F przy wyginaniu mogą zmieniać swój kształt, ale żaden ich łuk nie może zmienić swojej długości. Wynika stąd między innymi, że kres dolny długości łuków zawartych w F i łączących dane dwa punkty figury F jest przed i po wygięciu taki sam. Wartość tego kresu nazywa się wewnętrzną odległością punktów. Można udowodnić, że jeśli przekształcenie zachowuje wewnętrzną odległość dowolnych punktów, to jest izometrią wewnętrzną, czyli wygięciem. Jeśli zbiór płaski ma tę własność, że każda jego izometria wewętrzna przekształcająca go w podzbiór płaski jest zwykłą izometrią płaszczyzny, to powiemy, że zbiór jest sztywny na płaszczyźnie. Definicję sztywności zbiorów przenosi się bez trudności na wyższe wymiary.

Niewiele wiadomo o zbiorach sztywnych. Twierdzenie Borsuka orzeka, że każdy obszar (zbiór otwarty i spójny) w $\mathbf{E}^n$ jest sztywny w $\mathbf{E}^n$. Wynika stąd m. in., że trójkąta rzeczywiście nie da się wygiąć na płaszczyźnie. Co będzie jednak, gdy w sztywnym trójkącie zaczniemy wycinać trójkątne dziury tak, jak na rysunku obok i operację tę wykonamy nieskończenie wiele razy ? Okazuje się, że otrzymany w ten sposób zbiór S (krzywą trójkątową Sierpińskiego) można już wygiąć na płaszczyźnie. Żeby się o tym przekonać, spróbujmy najpierw wygiąć sam jego szkielet, tzn. sumę brzegów wszystkich trójkątów pojawiających się w czasie konstrukcji (górny rysunek na okładce przedstawia wygięcie piątego przybliżenia). Widać od razu, że w wyniku takiego odkształcenia łuki zawarte w szkielecie nie zmieniają swojej długości. Uważne przyjrzenie się (oczywiście w wyobraźni) zbiorowi S pozwala stwierdzić, że dowolnie blisko każdego jego punktu jest punkt należący do szkieletu. Dzięki temu dla każdego łuku łączącego dowolne dwa punkty zbioru S (a są tam i punkty nie należące do szkieletu) istnieje nie dłuższy od niego łuk, który poza (być może) końcami jest zawarty w szkielecie. Zatem kres dolny długości wszystkich łuków łączących dane punkty jest równy kresowi dolnemu długości łuków łączących punkty i biegnących (poza, być może, tymi punktami) w szkielecie. Dzięki temu można przedłużyć izometrię wewnętrzną szkieletu do izometrii wewnętrznej całego zbioru S. Krzywa trójkątowa Sierpińskiego nie jest więc zbiorem sztywnym na płaszczyźnie. Nie wiadomo natomiast, czy sztywny jest zbiór (dywan Sierpińskiego), którego czwarte przybliżenie pokazane jest na rysunku poniżej. Wbrew pozorom przekształcenie z dolnego rysunku okładki nie jest izometrią wewnętrzną.

mgr Krzysztof RUDNIK