O pewnym problemie typu Burnside'a

Prof. dr Wiesław Żelazko

W artykule tym chciałbym zapoznać Czytelnika z pewnym otwartym do tej pory problemem z teorii grup oraz przedstawić związek tego problemu ze słynnym problemem Burnside'a. Z pojęciem grupy Czytelnicy *Delty* mieli okazję spotkać się niejednokrotnie, samo pojęcie wchodzi zresztą w zakres programów szkolnych (np. grupy izometrii). Nie będę więc omawiał szczegółów, przypomnę jedynie definicję i przejdę od razu do rzeczy. Niepusty zbiór G z operacją $(x, y) \longmapsto xy$ prowadzącą od par elementów do elementów G nazywamy grupą, jeśli spełnione są następujące aksjomaty:

(i) Działanie grupowe jest łączne, tj. dla dowolnych x, y, $z \in G$ mamy

$$x(yz) = (xy)z\,.$$

(ii) Istnieje element e (jedność grupy) taki, że

$$xe = ex = x$$

dla każdego elementu x grupy G (element taki jest jedyny).

(iii) Każdy element x grupy G ma odwrotność x^{-1}, tj. taki element, że

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e$$

(odwrotność taka jest wyznaczona przez x jednoznacznie).

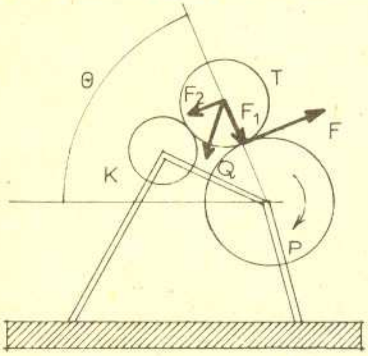
Podgrupą grupy G nazywamy podzbiór, który sam jest grupą ze względu na działanie grupowe. Wynika stąd, że każda podgrupa zawiera jedność e oraz wraz z parą elementów zawiera ich iloczyn xy i ich odwrotności. Ogólnie mówiąc, jeśli G_0 jest podgrupą G i zawiera elementy x i y, to zawiera również wszystkie elementy postaci

$$z = x^{a_1}y^{b_1}x^{a_2}y^{b_2}\ldots x^{a_n}y^{b_n}\,, \tag{1}$$

gdzie wykładniki a_i i b_i są liczbami całkowitymi (przyjmujemy przy tym $x^0 = e$ dla dowolnego x). Łatwo zauważyć, że dla dowolnych x i y w grupie G zbiór elementów postaci (1) jest podgrupą G, przy czym jest to najmniejsza podgrupa zawierająca x i y. Mówimy o tej podgrupie, że jest generowana przez x i y. Podobnie można mówić o podgrupie $G_0 \subset G$ generowanej przez elementy x_1, x_2, …, x_k. Składa się ona z iloczynów potęg (dodatnich lub ujemnych) tych elementów. Jeżeli $G_0 = G$, to mówimy, że grupa G ma k generatorów i elementy x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ są jej generatorami. Oczywiście jakieś inne elementy w innej ilości również mogą generować grupę G. Istnieją grupy nie mające skończonej liczby generatorów, tj. większe od każdej swojej podgrupy generowanej przez skończoną liczbę elementów (tak jest dla grupy wszystkich przesunięć prostej). Jeśli idzie o grupę generowaną przez pojedynczy element x, to mamy dwie możliwości. Albo istnieje liczba naturalna k taka, że $x^k = e$; wtedy istnieje też taka najmniejsza liczba naturalna k_0, zwana rzędem elementu x, że $x^{k_0} = e$. W tym przypadku grupa generowana przez x ma dokładnie k_0 elementów $x^0 = e$, x, x^2, …, x^{k_0-1} i branie większych wykładników prowadzi do poprzednich elementów, bo $x^{k_0} = x^0$, $x^{k_0+1} = x$ itd. Grupa taka jest z punktu widzenia teorii grup nieodróżnialna od grupy obrotów k_0-kąta foremnego (mówimy, że obie grupy są izomorficzne). W drugim przypadku wszystkie potęgi x^k, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, są różne i grupa generowana przez x jest izomorficzna z grupą wszystkich liczb całkowitych z dodawaniem jako działaniem grupowym. Mówimy w tym przypadku, że rząd elementu x jest nieskończony. Oczywiście grupa generowana przez jeden element musi być przemienna, tj. $xy = yx$ dla dowolnych jej elementów.

W roku 1902 W. Burnside postawił pytanie, czy grupa o skończonej liczbie generatorów, której wszystkie elementy mają rzędy wspólnie ograniczone (tj. istnieje stała M taka, że rzędy wszystkich elementów grupy są skończone i nie większe od M), musi być grupą skończoną. Problem ten przez ponad pół wieku pozostawał nie rozstrzygnięty, nie znana była też odpowiedź na jego słabszą wersję, w której warunek wspólnej ograniczoności rzędów elementów grupy jest zastąpiony przez skończoność tych rzędów (warunek oczywisty, bo element rzędu nieskończonego generuje grupę nieskończoną). Problem ten rozstrzygnęli matematycy radzieccy. W roku 1959 P. S. Nowikow zaanonsował (bez podania dowodu) istnienie nieskończonej grupy o dwóch lub więcej generatorach, dla której rzędy wszystkich elementów są dzielnikami pewnej liczby $n \geq 72$.

Rozwiązanie zadania F 250. Siłę ciężkości wałka T rozłożymy na dwie składowe: siłę prostopadłego nacisku na walec P, równą $F_1 = Mg\sin\Theta$ i siłę prostopadłą do niej $F_2 = Mg\cos\Theta$.



Kontakt między wałkiem T i bębnem K będzie utrzymany, jeśli zaznaczona na rysunku siła F („ciągnąca" papier), z jaką walec P działa na wałek T (i która powoduje jego ruch obrotowy) będzie mniejsza lub równa sile F_2, tj.

$$F \leq Mg\cos\Theta$$

(znak równości odpowiada zerowej wartości nacisku T na K). Równanie ruchu obrotowego wałka T w przypadku, gdy nie wywiera on nacisku na bęben K, ma postać $I\epsilon_1 = Fr$, tj. $(Mr^2/2)\epsilon_1 = Mgr\cos\Theta$ (ϵ_1 oznacza przyspieszenie kątowe wałka T). Stąd

$$\epsilon_1 = \frac{2g}{r}\cos\Theta.$$

Liniowe przyspieszenia punktów na obwodzie T i P są jednakowe, co oznacza, że $\epsilon_1 r = \epsilon R$. Otrzymujemy stąd

$$\epsilon = \epsilon_1\frac{r}{R} = \frac{2g}{R}\cos\Theta,$$

gdzie R oznacza promień walca P.

Generatorami grupy izometrii ośmiokąta foremnego są np. obrót o kąt $\pi/4$ i symetria względem prostej przechodzącej przez wierzchołek wielokąta i jego środek symetrii. Rząd obrotu o kąt $\pi/4$ równy jest 8, rząd obrotu o $5\pi/4$ też 8, a rząd obrotu o $\pi/2$ jest równy 4.

Generatorami grupy izometrii płaszczyzny są np. wszystkie symetrie osiowe albo też symetrie względem wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt i jeszcze jednej prostej nie przechodzącej przez ten punkt. Rząd symetrii osiowej jest równy 2. Rząd przesunięcia o wektor niezerowy jest nieskończony. Rząd obrotu o kąt $\frac{2k}{n}\pi$, gdzie k i n są względnie pierwsze, jest równy n. Rząd obrotu o kąt niewspółmierny z π jest nieskończony.

Słabszą wersję rozstrzygnął negatywnie E. S. Gołod w roku 1964, a pełny dowód wersji silniejszej podali w roku 1968 S. I. Adjan i P. S. Nowikow; rezultat był nieco słabszy niż anonsowany uprzednio przez Nowikowa. Udowodnili oni, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, nie mniejszą niż 4381 i $m \geq 2$, to istnieje grupa nieskończona o m generatorach, której każdy element spełnia warunek $x^n = e$. Jest to jeden z najtrudniejszych wyników teorii grup, trzyczęściowa praca Adjana i Nowikowa liczy ponad 300 stron druku i używa ponad 500 lematów.

Problem, o którym chcę tu opowiedzieć, również formułuje się bardzo prosto. Nie jest on do tej pory rozwiązany. Mianowicie jest to pytanie następujące: czy jeżeli dla grupy G istnieje stała C taka, że dla dowolnych skończonych podzbiorów A i B grupy G mamy

$$C|AB| \geq |A||B|, \tag{2}$$

to grupa G musi być skończona? W powyższym wzorze symbol $|Z|$ oznacza moc (liczbę elementów) zbioru Z, a iloczyn AB jest zbiorem wszystkich iloczynów xy, gdzie $x \in A$ i $y \in B$. Problem ten postawiony przez autora tego artykułu w roku 1974 powstał w związku z pewnymi rozważaniami z zakresu tzw. analizy harmonicznej na grupach. Jest on również związany z klasycznym problemem Burnside'a. Aby się o tym przekonać, zauważmy, że jeżeli grupa G spełnia (2) i G_0 jest podgrupą skończoną grupy G, to $|G_0| \leq C$. Istotnie: mamy $G_0G_0 = G_0$, bo iloczyny elementów podgrupy G_0 są w tej podgrupie, a każdy element x podgrupy G_0 można zapisać jako iloczyn $x = xe$. Kładąc w (2) $A = B = G_0$ otrzymamy $C|G_0| \geq |G_0|^2$, czyli $|G_0| \leq C$. Zauważmy dalej, że każda podgrupa przemienna grupy G spełniającej warunek (2) musi być skończona. Niech bowiem G_0 będzie podgrupą przemienną grupy G. Gdyby grupa G_0 zawierała element x_0 rzędu nieskończonego, to wszystkie potęgi x_0^n byłyby różne i wtedy ustalając dowolnie n położylibyśmy $A = B = \{x_0^0 = e, x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{n-1}\}$. Wtedy $|A| = |B| = n$, oraz $AB = \{e, x_0, x_0^2, \ldots, x_0^{2n-2}\}$, a więc $|AB| = 2n - 1$. Ze wzoru (2) wynika wtedy $C(2n - 1) \geq n^2$, co, oczywiście, nie może być prawdą dla dużych n, a n wybieraliśmy dowolnie. Wynika stąd, że rzędy wszystkich elementów są skończone. Ponieważ elementy generują podgrupy mocy równej swojemu rzędowi i moce podgrup skończonych G są nie większe niż C, więc i rzędy wszystkich elementów grupy G mają rzędy wspólnie ograniczone przez C, a więc sytuacja jest taka jak w problemie Burnside'a. Ponieważ nie jest dla nas istotne, czy podgrupy przemienne grupy spełniającej warunek (2) są skończone, dowód ten opuścimy, ale Czytelnik korzystając z dotychczas udowodnionych faktów może ten dowód otrzymać. Jeżeli istnieje grupa nieskończona spełniająca warunek (2), to wybierając w niej dowolne elementy $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gdzie $n \geq C$ i generując przez te elementy podgrupę G_0 grupy G otrzymamy podgrupę, która ma więcej niż C elementów, a zatem jest nieskończona, ma skończenie wiele generatorów oraz rzędy wszystkich jej elementów są wspólnie ograniczone przez liczbę C. Roztrzyga więc ona wspomniany wyżej problem Burnside'a. Wynika stąd, że jeżeli postawiony przez nas problem ma rozwiązanie negatywne, tj. istnieje grupa nieskończona spełniająca warunek (2), to konstrukcja takiej grupy jest bardzo trudna, bo zawiera w sobie rozwiązanie bardzo trudnego problemu Burnside'a. Być może nie ma takiej grupy i rozwiązanie problemu jest pozytywne. Miałoby to interesujące konsekwencje dla analizy harmonicznej, w szczególności rozstrzygałoby to tzw. hipotezę L_p dla grup dyskretnych. Przy tym dowód takiego twierdzenia nie musi być beznadziejnie trudny. Oczywiście nie można gwarantować, że problem w ogóle da się rozstrzygnąć (zdarzają się w matematyce przypadki, że zarówno sformułowana hipoteza, jak i jej zaprzeczenie nie mają dowodów w ramach rozważanej teorii – są od niej niezależne; tak było np. ze słynną hipotezą continuum lub z pewnikiem wyboru), ale miejmy nadzieję, że w tym przypadku tak nie jest.

Jeżeliby jeszcze coś założyć o grupie G spełniającej warunek (2), to wtedy łatwiej można by rozwiązać nasz problem. Na przykład zakładając przemienność grupy G i spełnianie warunku (2) można udowodnić jej skończoność (niemal to uczyniliśmy w tym artykule), podobnie można by to zrobić zakładając tzw. rozwiązalność grupy G lub czyniąc jeszcze inne założenia. Nas interesuje jednak ten problem w całej jego ogólności. Czytelnika pragnącego pogłębić tę tematykę możemy skierować do książki A. G. Kurosza *Teoria Grup* (po rosyjsku), Moskwa 1967 (wydanie III), w szczególności str. 497-500 – oczywiście nie może tam być mowy o dowodzie Adjana i Nowikowa, a nawet wynik Gołoda cytowany jest bez dowodu. Problem, o którym mowa w artykule, został postawiony (w ogólniejszej postaci dla tzw. grup lokalnie zwartych) w pracy autora *On the Burnside problem for locally compact groups*, Symposia Math. 16(1975), 409-416.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

HOLOGRAFIA PRZY UŻYCIU PROMIENI RENTGENA

Czy można zajrzeć do wnętrza żywej komórki nie niszcząc jej przy okazji? Odpowiedź na to pytanie była dotychczas negatywna. Mikroskopy optyczne wykorzystują zbyt długie fale świetlne by mogły być użyte do badań najmniejszych bakterii czy wirusów. Z kolei mikroskopy elektronowe, których zdolność rozdzielcza dochodzi do pojedynczych angstremów (10^{-10} m) nie mogą być łatwo użyte do badania struktur biologicznych, gdyż można badać za ich pomocą tylko cienkie warstwy i to w próżni. Jednakże rezultaty otrzymane w 1987 roku w Laboratorium imienia Lawrence'a Berkeley należącym do Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley pozwalają na więcej optymizmu. Do badań komórek użyto bowiem "miękkich" promieni rentgena o długościach fal między 25 a 32 Å. W zasadzie promienie X o długościach fal pomiędzy 10 Å a 50 Å powinny umożliwić badania obiektów o rozmiarach mniejszych niż 100 Å. W praktyce problemem poważnie utrudniającym dotychczasowe eksperymenty była słaba spójność źródeł promieni rentgena jak i słaba zdolność rozdzielcza filmów rejestrujących to promieniowanie. Dzięki wykorzystaniu nowych źródeł promieni X zbudowanych w Narodowym Laboratorium w Brookhaven oraz specjalnych warstwowych detektorów przekroczono po raz pierwszy w holografii rentgenowskiej granicę zdolności rozdzielczej 1 µm = 1000 Å. Obiektem badań były grupy enzymów, tworzące kulki o wymiarach 0,85 µm ± 0,12 µm znajdujące się w komórkach trzustki szczura. Badano warstwy o grubości 2000 Å. W ciągu 80 minut ekspozycji przez próbkę przechodziło 8×10^{11} fotonów, co odpowiada dawce około 200 megaradów. Rozproszone promieniowanie przechodzące interferowało na detektorze warstwowym (zbudowanym z odpowiedniego polimeru) z wiązką nierozproszoną tworząc hologram. Wytrawienie owego polimeru wytwarzało wypukłą rzeźbę, która następnie była pokrywana warstwą złota i palladu, oglądana pod mikroskopem elektronowym i ostatecznie analizowana za pomocy komputera. Kulki enzymów znajdujące się wewnątrz żywych komórek były doskonale widoczne na ekranie. Uzyskana w ten sposób rekordowa zdolność rozdzielcza wyniosła około 400 Å, co jest wynikiem 20 razy lepszym niż poprzednie rezultaty. Autorzy pracy twierdzą, że wynik ten może ulec dalszej poprawie. Wydaje się więc, że opanowana została nowa, nieniszcząca metoda badania wnętrza mikroskopijnych obiektów biologicznych