Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Termin nadsyłania rozwiązań:
31 X 1988

$$\sqrt[\otimes]{\int\!\!\sum !}=44$$

Zadania z matematyki nr 173, 174

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

173. W szeregu harmonicznym $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-1}$ zmieniamy znaki niektórych wyrazów (nie zmieniając ich kolejności) tak, że zarówno składniki dodatnie, jak i ujemne, występują ze średnią częstością 1/2. (To znaczy, rozważamy szereg postaci $\sum \varepsilon_n n^{-1}$, gdzie $\varepsilon_n \in \{+1,-1\}$, $\lim(\varepsilon_1+\ldots+\varepsilon_n)n^{-1}=0$.) Czy możemy w ten sposób otrzymać szereg rozbieżny ?

174. Dowieść, że dla dowolnych trzech różnych liczb wymiernych x, y, z liczba

$$\frac{1}{(y-z)^2}+\frac{1}{(z-x)^2}+\frac{1}{(x-y)^2}$$

jest kwadratem liczby wymiernej.

Zadanie **174** zaproponował pan Krzysztof Hryniewiecki z Białegostoku.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 163 /WT=1,29/ i 164 /WT=3,25/
z numeru 1/1988

Krzysztof Hryniewiecki	- Białystok	42,47pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	41,77pkt
Andrzej Pawłowski	- Zabrze	35,98pkt

Lista nazwisk tym razem króciutka /zgodnie z przyjętymi ustaleniami nie wymieniamy uczestników, którzy przez trzy kolejki nie powiększyli swego dorobku punktowego/. Jest jednak ruch w strefie 25 - 30-punktowej i rozszerzenie aktywnej czołówki powinno nastąpić już wkrótce.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 4/1988

Przypominamy treść zadań:

169. W każdym wierzchołku wielościanu wypukłego schodzą się co najmniej 4 krawędzie. Dowieść, że co najmniej 8 ścian to trójkąty.

170. a) Z jest podzbiorem płaszczyzny nie zawartym w prostej; wszystkie odległości między punktami zbioru Z są liczbami naturalnymi. Udowodnić, że Z jest zbiorem skończonym.
b) Dla dowolnie zadanej liczby naturalnej $n \geq 3$ dać przykład n-punktowego zbioru Z o własnościach wymienionych w a).

169. Skorzystamy ze wzoru Eulera: $V-E+F=2$ (gdzie V, E, F oznaczają odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian danego wielościanu). Niech T będzie liczbą ścian trójkątnych. Mamy więc nierówności: $2E \geq 4V$ (z warunku zadania) oraz $2E \geq 3T+4(F-T)=4F-T$. Wobec tego $4E = 2E+2E \geq 4V+4F-T = 4(E+2)-T$, a stąd $T \geq 8$.

170. a) Niech O, A, B będą trzema niewspółliniowymi punktami zbioru Z. Przyjmijmy $|OA|=k$, $|OB|=l$. Jeśli P jest dowolnym punktem zbioru Z, to $||AP|-|OP|| \leq k$, $||BP|-|OP|| \leq l$. Dla dowolnych liczb całkowitych i, j takich, że $|i| \leq k$, $|j| \leq l$ rozważamy zbiory $U_i = \{P:\ |AP|-|OP|=i\}$, $V_j=\{P:\ |BP|-|OP|=j\}$. Jeśli $0<|i|<k$, to U_i jest gałęzią hiperboli o osi symetrii OA; dla $i=0$ zbiór U_i jest prostą (symetralną odcinka OA); dla $i=\pm k$ jest to półprosta (o początku O lub A, zawarta w prostej OA). Analogiczną postać mają zbiory V_j. Każdy ze zbiorów $U_i \cap V_j$ jest skończony (dwie gałęzie różnych hiperbol przecinają się w ≤ 4 punktach; prosta przecina gałąź hiperboli w ≤ 2 punktach; a gdy zarówno U_i jak i V_j jest (pół)prostą, nie są to proste identyczne – tu się korzysta z niewspółliniowości punktów O, A, B). Zbiór Z jest zawarty w sumie $\bigcup\limits_{|i|\leq k,\ |j|\leq l} U_i \cap V_j$ – jest więc skończony.

b) W kartezjańskim układzie współrzędnych na płaszczyźnie określamy nieskończony ciąg punktów $P_k=(k-k^{-1},2)$ dla $k=1,2,\ldots$ Niech $O=(0,0)$. W zbiorze $\{O\} \cup \{P_k:\ k=1,2,\ldots\}$ wszystkie odległości są liczbami wymiernymi (bo $|OP_k| = k+k^{-1}$). Dla dowolnej liczby naturalnej n obraz zbioru $\{O,P_1,\ldots,P_{n-1}\}$ w jednokładności o skali $n!$ jest n-punktowym zbiorem o wszystkich odległościach całkowitych.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 59 /WT=1,48/, 60 /WT=3,41/,
61 /WT=1,22/ i 62 /WT=2,97/
z numerów 12/1987 i 1/1988

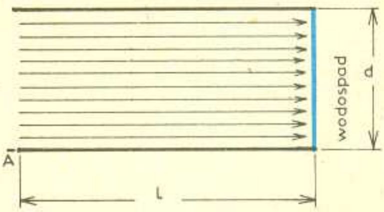
Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	48,77pkt
Bogusław Mikielewicz	- Brodnica	41,37pkt
Piotr Bała	- Toruń	30,15pkt
Roman Musiał	- Katowice	25,86pkt
Piotr Koczyński	- Warszawa	25,44pkt
Paweł Perkowski	- Szczecin	24,08pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	22,55pkt

Pan Lipniacki, jako drugi członek Klubu 44 F, uzyskał ponownie 44 punkty /po zadaniach 59 i 60/.

Zadania z fizyki nr 71, 72

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

71. Rzeka o jednorodnym, wartkim nurcie i szerokości d opada w pewnym miejscu gwałtownym wodospadem (rys.1). W odległości l od wodospadu, w górę rzeki (w punkcie A) skacze do wody pływak, pragnący przepłynąć na drugi brzeg. W jakim kierunku powinien on płynąć, aby mieć największe szanse osiągnięcia drugiego brzegu powyżej wodospadu? Przyjmujemy, że pływak płynie cały czas ze stałą (największą osiągalną) prędkością.



Rys.1

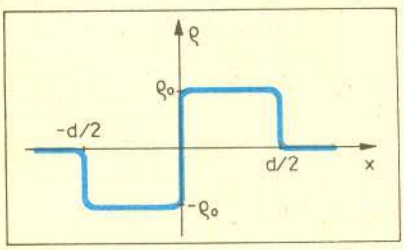
72. W wyniku parowania wody wzrosła wilgotność powietrza nad jeziorem z 60% do 90%, nie uległa natomiast zmianie ani temperatura powietrza $T = 300$ K, ani ciśnienie atmosferyczne $p = 100$ kPa. Czy zmieniła się przy tym gęstość samego powietrza (bez pary wodnej)? Jeśli tak, to w jakim stosunku?
Ciśnienie nasyconej pary wodnej w temperaturze 300 K wynosi 3,4 kPa.
Zadanie **72** nadesłała pani Rozalina Staszak z Kalisza.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 4/1988

Przypominamy treść zadań:

67. W półprzewodnikowym złączu p-n istnieje przestrzenny rozkład ładunku, jak na rysunku 2 (x – odległość od „środkowej płaszczyzny" złącza, ρ – gęstość ładunku). Przyjmując, że stała dielektryczna półprzewodnika wynosi ε, przedstawić zależność natężenia pola elektrycznego od współrzędnej x.

68. Wyznaczyć stosunek średnich gęstości Słońca i Ziemi, korzystając wyłącznie z poniższych danych: promień Ziemi – $6{,}4\cdot 10^6$ m, przyspieszenie ziemskie – $9{,}8\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$, średnica kątowa Słońca oglądanego z Ziemi – $9{,}3\cdot 10^{-3}$ rad, 1 rok $\approx 3,2\cdot 10^7$ s.



Rys.2

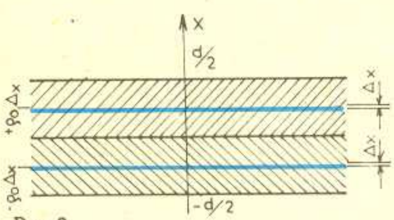
67. Dzielimy obszar ładunku przestrzennego na cienkie warstwy prostopadłe do osi x (rys.3). Powierzchniowa gęstość ładunku warstwy o grubości Δx wynosi $\sigma = \rho\Delta x$, czyli $-\rho_0\Delta x$ dla $-d/2 < x < 0$ oraz $\rho_0\Delta x$ dla $0 < x < d/2$. Parę takich warstw o współrzędnych $x = -x'$ oraz $x = x'$ można traktować jako okładki naładowanego kondensatora. Wektor natężenia pola elektrycznego $\mathbf{E}$ między okładkami takiego kondensatora jest równoległy do osi x, ma przeciwny do niej zwrot i wartość bezwzględną

$$|\mathbf{E}| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho\Delta x}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

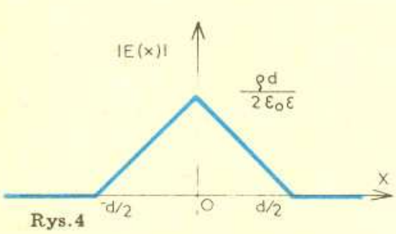
(ε_0 – przenikalność elektryczna próżni). Wartość bezwzględną wypadkowego pola elektrycznego w punktach o współrzędnej x otrzymujemy sumując (całkując) wartość natężenia pola kondensatorów, dla których x' spełnia warunek $|x| < x' < d/2$:

$$|\mathbf{E}(x)| = \frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}\left(\frac{d}{2} - |x|\right).$$

Wykres tej funkcji przedstawia rysunek 4.



Rys.3



Rys.4

68. Wprowadzamy następujące oznaczenia: m_s – masa Słońca, m_z – masa Ziemi, r_s – promień Słońca, r_z – promień Ziemi ρ_s – gęstość Słońca, ρ_z – gęstość Ziemi, R – promień orbity Ziemi, T – okres obiegu Słońca przez Ziemię (rok), g – przyspieszenie ziemskie, α – średnica kątowa Słońca. Działająca na Ziemię siła grawitacji słonecznej $F_G = \mathrm{G}\dfrac{m_s m_z}{R^2}$ (G – stała grawitacji) pełni rolę siły dośrodkowej (w ruchu Ziemi wokół Słońca). Siła odśrodkowa jest równa $F_R = \dfrac{4\pi^2 R m_z}{T^2}$.
Z przyrównania F_G i F_R mamy

$$m_s = \frac{4\pi^2 R^3}{\mathrm{G}T^2}. \tag{1}$$

Na powierzchni Ziemi ciało o masie m jest przyciągane przez Ziemię siłą

$$m\mathrm{g} = \mathrm{G}\frac{m_z m}{r_z^2},$$

skąd

$$\mathrm{G} = \frac{\mathrm{g}r_z^2}{m_z}. \tag{2}$$

Poszukiwany stosunek gęstości jest równy

$$\frac{\rho_s}{\rho_z} = \frac{m_s r_z^3}{m_z r_s^3}. \tag{3}$$

Na podstawie (1), (2), (3) oraz związku $r_s = R\alpha/2$ otrzymujemy

$$\frac{\rho_s}{\rho_z} = \frac{32\pi^2 r_z}{\alpha^3 \mathrm{g} T^2} = 0,25.$$