Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

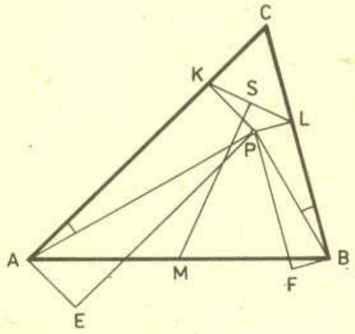
Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/1988

Przypominamy treść zadań:

167. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P w jego wnętrzu, przy czym $|\angle CAP| = |\angle CBP|$. Niech K i L będą rzutami punktu P na boki AC i BC. Udowodnić, że symetralna odcinka KL połowi bok AB.

168. Podać warunek konieczny i dostateczny, jaki muszą spełniać liczby naturalne n i k, aby szachownicę o wymiarach $n \times n$ można było pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami o wymiarach $1 \times k$.



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 161 /WT=2,89/ i 162 /WT=1,25/ z numeru 12/1987

Piotr Wach	– Katowice	44,08pkt
Tadeusz Józefczyk	– Poznań	43,15pkt
Krzysztof Hryniewiecki	– Białystok	41,18pkt
Krzysztof Jedziniak	– Katowice	40,48pkt
Adam Ruszel	– Krosno	38,97pkt

Pan Wach jest pięćdziesiątym czwartym członkiem Klubu 44 M.

167. Uzupełnijmy trójkąty PKA i PLB do prostokątów $PKAE$ i $PLBF$. Oznaczmy środki odcinków AB i KL odpowiednio przez M i S (rysunek 1).

Użyjemy rachunku na wektorach:

$$\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PS} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PL}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{LB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF});$$

możemy więc obliczyć iloczyn skalarny

$$\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{KL} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF}) \cdot (\overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PK}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PK} + \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PK}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PL} - \overrightarrow{PF} \cdot \overrightarrow{PK}) = \frac{1}{2}(|PE| \cdot |PL| - |PF| \cdot |PK|)\cos\varphi,$$

gdzie $\varphi = |\angle KPF| = |\angle LPE|$ ($=90^0 + |\angle BCA|$). Z warunków zadania wynika, że

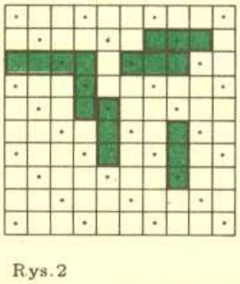
$$\frac{|PK|}{|PE|} = \frac{|PK|}{|KA|} = \operatorname{tg}|\angle CAP| = \operatorname{tg}|\angle CBP| = \frac{|PL|}{|LB|} = \frac{|PL|}{|PF|}.$$

Zatem $\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{KL} = 0$, co oznacza, że prosta SM jest symetralną odcinka KL.

168. Załóżmy, że pokrycie takie jest wykonalne. Oczywiście $k \le n$. Niech q i r będą ilorazem i resztą z dzielenia n przez k. Oznaczmy kropką wszystkie pola jednej z dwóch przekątnych szachownicy oraz wszystkie pola na liniach ukośnych, równoległych do tej przekątnej i odległych od niej o $k, 2k, 3k, \ldots$ pól (rysunek 2 ilustruje przypadek: $n = 10$, $k = 3$). Łączna liczba wyróżnionych pól wynosi

$$n + 2((n-k) + (n-2k) + \ldots + (n-qk)) = (2q+1)n - 2k(1+2+\ldots+q) =$$

$$= (2q+1)(qk+r) - kq(q+1) = kq^2 + (2q+1)r.$$



Rys. 2

Każda płytka zakrywa dokładnie jedno z wyróżnionych pól. Znaleziona liczba powinna być zatem równa $1/k$ wszystkich pól szachownicy, czyli

$$\frac{n^2}{k} = \frac{(qk+r)^2}{k} = kq^2 + 2qr + \frac{r^2}{k}.$$

Przyrównując otrzymane liczby stwierdzamy, że $r = r^2/k$. A ponieważ $r \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, wnosimy stąd, że $r = 0$. To znaczy, że k musi być dzielnikiem n.

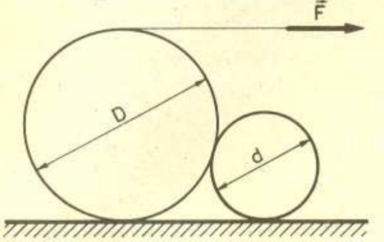
Na odwrót, jeśli k dzieli n, to potrafimy bez trudu pokryć szachownicę $n \times n$ prostokątami $1 \times k$. Podzielność n przez k jest więc poszukiwanym warunkiem.

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/1988

Przypominamy treść zadań:

65. Określić, przy jakim stosunku średnic D/d można za pomocą poziomej siły **F**, przyłożonej do końca linki owiniętej wokół walca, przetoczyć go przez mniejszy walec. Podać wartość siły, gdy współczynniki tarcia walców o siebie i podłoże wynoszą f (rys.1).



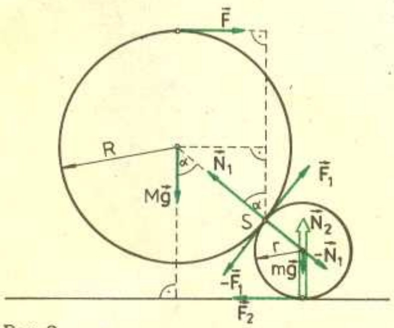
Rys.1

66. Oszacować minimalny promień planety, dla którego możliwe jest utrzymanie się atmosfery z azotu i tlenu. Przyjąć średnią gęstość planety $\rho = 5 \cdot 10^3$ kg/m^3, temperaturę powierzchni $T = 300$ K. Czy byłoby możliwe utrzymanie atmosfery na Księżycu?

65. Przetoczenie walca będzie możliwe, o ile w pozycji z rysunku 2, niezależnie od wartości kąta α, nie będzie poślizgu ani między walcami, ani w miejscu styku z podłożem. Między siłami tarcia $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{F_2}$ a siłami docisku $\mathbf{N_1}$ i $\mathbf{N_2}$ zachodzą nierówności

$$F_1 \leq fN_1 \tag{1}$$

$$F_2 \leq fN_2. \tag{2}$$



Rys.2

(Przedstawione na rysunku siły $\mathbf{F_1}$ i $\mathbf{N_1}$ działają na walec duży, natomiast $-\mathbf{F_1}$ i $-\mathbf{N_1}$ na walec mały.) W równowadze znikają momenty sił działających na każdy z walców, a więc $F = F_1 = F_2$, a także składowe wypadkowe działających sił – przyrównując do zera sumę składowych poziomych sił działających na mały walec mamy:

$$N_1 \sin\alpha - F_1 \cos\alpha - F_2 = 0.$$

Stąd i z (1) wynika

$$f \geq \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{3}$$

Sprawdźmy warunki spełnienia nierówności (2). Mamy $N_2 = (M+m)g$; a ze znikania wypadkowego momentu sił działających na duży walec względem punktu S otrzymujemy $FR(1+\cos\alpha) - MgR\sin\alpha = 0$, skąd $F = Mg\sin\alpha/(1+\cos\alpha)$ i ostatecznie $F_2 \leq fN_2 m/(M+m)$. Przy spełnionym warunku (3) nierówność (2) jest więc zawsze spełniona. Prawa strona nierówności (3) osiąga maksimum dla $\alpha = \alpha_{max}$ odpowiadającego sytuacji wyjściowej (rys.1). Dla położenia startowego zachodzi

$$\cos\alpha_{max} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{D-d}{D+d}$$

i ostatecznie poszukiwany warunek ma postać:

$$\frac{D}{d} \geq \frac{1}{f^2}.$$

Siła potrzebna do przetoczenia walca (podstawiamy wartość odpowiadającą α_{max}) jest równa $F = Mg\sqrt{D/d}$.

66. Jeśli atmosfera ma się utrzymać, to prędkości ruchu cieplnego cząsteczek gazu powinny być mniejsze od prędkości ucieczki z powierzchni planety (drugiej prędkości kosmicznej). Do oszacowania prędkości ruchu cieplnego skorzystamy ze związku średniego kwadratu prędkości $\overline{v^2}$ cząsteczki o masie m z temperaturą T

$$\frac{m\overline{v^2}}{2} = \frac{3}{2}kT,$$

gdzie k – stała Boltzmanna. Stąd mamy $\overline{v^2} = 3kT/m = 3RT/\mu$ (R – stała gazowa, μ – masa cząsteczkowa). Prędkość ucieczki wynosi

$$v_u = \sqrt{2GM/r}$$

(G – stała grawitacji, M – masa, r – promień planety). Z warunku $\overline{v^2} < v_u^2$ mamy $3RT/\mu < 2GM/r$ i ostatecznie

$$r > \sqrt{\frac{9RT}{8\pi G\rho\mu}}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych: R= $8,31 \cdot 10^3$ J/(kmol K), G= $6,67 \cdot 10^{-11}$ N m^2/kg^2, $\mu = 28$ kg/kmol (wartość dla N_2, dla cięższych cząstek O_2 promień jest mniejszy) otrzymujemy r >310 km. Promień Księżyca – 1740 km – jest większy od promienia krytycznego (jego średnia gęstość – $3{,}34 \cdot 10^3$ kg/m^3 i maksymalna temperatura – 400 K, co daje promień krytyczny 440 km).