Co to są zbiory rozmyte

Doc. dr Tadeusz GERSTENKORN, mgr Jacek MAŃKO

W roku 1871 ukazała się praca Georga Cantora inicjująca badania nad pojęciem zbioru. Niewiele osób wróżyło wówczas temu pojęciu tak wielką przyszłość, jaka stała się jego udziałem. Pojęcie zbioru jest dziś podstawowym pojęciem matematyki.

Niech X oznacza pewną zbiorowość (mnogość) najróżniejszych przedmiotów. Zbiór (w znaczeniu zwykłym – klasycznym, cantorowskim) rozumiany jest wtedy jako zespół Z tych przedmiotów z X, które wyróżnia jakaś wspólna własność. Zatem przedmiot należy do pewnego zbioru, gdy ma określoną własność, nie należy do niego, gdy tej własności nie ma. Przy takim ujęciu zakłada się milcząco, że dany konkretny przedmiot może pewną własność mieć lub jej nie mieć, czyli może do zbioru należeć lub nie. Innej możliwości nie ma. Przykładem może być zbiór A liczb całkowitych większych od -3 i mniejszych od 4

Rys. 1

$$A = \{x \in \mathbf{C}: \quad -3 < x < 4\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\},$$

gdzie $\mathbf{C}$ oznacza zbiór wszystkich liczb całkowitych (rys.1).

Nie jest to jedyny sposób przedstawienia zbioru. Zbiór można również dobrze określić podając jego funkcję charakterystyczną.

Funkcją charakterystyczną zbioru $Z \subset X$ nazywamy funkcję $\chi_Z : X \longrightarrow \{0,1\}$ określoną wzorem

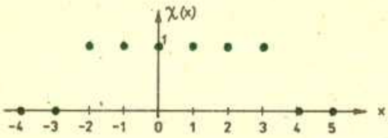
$$\chi_Z(x) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } x \in Z, \\ 0, & \text{gdy } x \notin Z. \end{cases} \tag{1}$$

Zbiór Z można wtedy przedstawić w postaci zbioru par

$$Z = \{(x, \chi_Z(x))\}. \tag{2}$$

Wspomniany zbiór A wyglądałby następująco

$$A = \{\ldots, (-4,0), (-3,0), (-2,1), (-1,1), (0,1), (1,1), (2,1), (3,1), (4,0), (5,0), \ldots\}.$$



Rys. 2

Wykres funkcji χ_A przedstawia rysunek 2.

Życie codzienne dostarcza nam jednak przykładów, gdzie podobna interpretacja, tzn. dokładne wskazanie elementów przynależnych do zbioru (czyli mających określoną własność), nastręcza duże trudności.

Dla przykładu weźmy „wysokiego mężczyznę". Czy wysoki mężczyzna to ten, który ma co najmniej 180 cm, czy 185 cm, czy też dopiero 193 cm wzrostu? Widać wyraźnie, że nie można tu w żaden sposób przeprowadzić naturalnej i sensownej granicy między „mężczyzną wysokim" a tym, który nim nie jest. Stwierdzenie, że np. wysocy są tylko ci, którzy mają powyżej 185 cm wzrostu, jest tu, oczywiście, sztuczne. Bo co zrobić z mężczyzną, który ma 184 cm wzrostu? On jest przecież też „wysoki", podobnie jak i ten, który ma 183 cm wzrostu.

Analogicznie przedstawia się sprawa z pojęciem „łysy". O człowieku, który nie ma ani jednego włosa na głowie, z pewnością powiemy, że jest łysy; ale co zrobić z tym, który ma pewną ilość włosów na głowie, choć nie za bardzo zaznaczoną?

Podobnie, jak określić cenę za 100 kg ziemniaków, oferowanych w różnych punktach sprzedaży. Czy cena 2500 zł jest „wysoka", czy nie? Jak wygląda „wysokość" tej ceny dla 2800 zł, 3000 zł czy też 3200 zł?

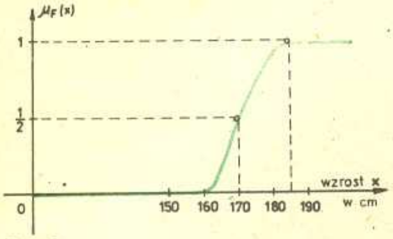
W celu uniknięcia takich nieścisłości L. A. Zadeh wprowadził w 1965 roku pojęcie zbioru rozmytego (ang. *fuzzy set*). Analogicznie do zależności (1) i (2) zbiór rozmyty Z określony w obszarze rozważań X można przedstawić jako zbiór par

$$Z = \{(x, \mu_Z(x))\}, \tag{3}$$

gdzie $\mu_Z : X \longrightarrow [0,1]$ jest tzw. funkcją przynależności, która każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowuje stopień przynależności do danego zbioru rozmytego: od nieprzynależności ($\mu_Z(x) = 0$) poprzez przynależność częściową ($0 < \mu_Z(x) < 1$), do całkowitej przynależności ($\mu_Z(x) = 1$).

Rozwiązanie zadania M 518. Załóżmy, że a i b są względnie pierwsze. Jeśli $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = k$, to $a^2 + b^2 = abk$, czyli $b^2 = a(bk - a)$. Znaczy to, że b^2 jest podzielne przez a. Jest to możliwe tylko dla $a = \pm 1$. Podobnie $b = \pm 1$. Tak więc wśród par liczb względnie pierwszych rozwiązaniami są tylko $(\pm 1, \pm 1)$.

Ogólnie: liczba $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ jest całkowita tylko dla $a = \pm b$.



Rys.3

Poniższy, uproszczony bardzo przykład pozwoli zapoznać Czytelnika z pewnym zastosowaniem pojęcia rozmytości w wybranym problemie ekonomicznym.

Przyjmijmy, że na pewnym terytorium znajdują się dwa zakłady produkcyjne A i B produkujące ten sam wyrób przy różnym koszcie jednostkowym. Ceny tego wyrobu są więc równe: k_A i k_B. Może się zdarzyć, że ceny te nie są stałe i nie każda cena jest możliwa do przyjęcia. Ceny zbyt wysokie mogą wywołać niezadowolenie, a ceny zbyt niskie mogą spowodować upadłość zakładu. Ceny k_A i k_B można wówczas potraktować jako rozmyte określając funkcje możliwości (przynależności) wprowadzenia różnych cen wyrobów obu zakładów (powołując np. grupę ekspertów proponujących różne ceny). Powiedzmy, że w zakładzie A rozważano cztery warianty cen, a w zakładzie B trzy warianty, przy czym każda z proponowanych cen ma odpowiedni stopień realności funkcjonowania na rynku. Pokazują to tabele:

k	1	2	3	4
$\mu_A(k)$	0,5	0,7	1	0,2

k	1	2	3
$\mu_B(k)$	0,5	1	0,3

Z tych tabel widać, że najbardziej realna cena dla zakładu A to cena nr 3, a dla zakładu B cena nr 2.

Mając funkcje przynależności cen dla obu zakładów można zainteresować się problemem ustalenia zbiorowości nabywców wyrobów rozważanych zakładów (przy założeniu, że są sprzedawane tylko w miejscowości A i odpowiednio B). Stawiamy zadanie znalezienia granicy rozdzielającej klientów kupujących w miejscowości A od klientów kupujących w miejscowości B. Przyjmujemy dość naturalne założenia, że cena p przejazdu jednego kilometra jest stałą oraz że klient chce płacić jak najmniej. Niech C będzie miejscem zamieszkania pewnego klienta. Odległość C od A i B jest odpowiednio d_{CA} i d_{CB}. Wtedy dla klienta zlokalizowanego w punkcie C koszt zakupu wyrobu z zakładu A wynosi $d_{CA} \cdot p + k_A$ jednostek płatniczych, a z zakładu B wynosi $d_{CB} \cdot p + k_B$ jednostek. Szukaną granicę stanowi wtedy zbiór punktów spełniających równanie: $d_{CA} \cdot p + k_A = d_{CB} \cdot p + k_B$. Wielkości d_{CA} i d_{CB} (a więc i potencjalny klient) będą zmienne w zależności od przyjętych cen k_A i k_B.

Dla ilustracji załóżmy, że funkcja przynależności zbioru rozmytego F przedstawiającego „wysokiego mężczyznę" wygląda tak, jak na rysunku 3. Można ją interpretować następująco: mężczyzny poniżej 160 cm nie uznajemy na pewno za wysokiego, mężczyznę powyżej 185 cm na pewno uznajemy za wysokiego, a mężczyznę o wzroście od 160 cm do 185 cm uznajemy za wysokiego w pewnym stopniu (170 cm – wysoki w stopniu 1/2), przy czym tym bardziej, im bliższe 1 są wartości funkcji μ_F.

A oto inne przykłady zbiorów rozmytych.

Niech $X = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. Rozmyty zbiór „kilka" w przestrzeni X można określić jako

$$„\text{kilka}" = \left\{(1,0), \left(2,\tfrac{1}{4}\right), \left(3,\tfrac{1}{2}\right), \left(4,\tfrac{3}{4}\right), (5,1), \left(6,\tfrac{3}{4}\right), \left(7,\tfrac{1}{2}\right), \left(8,\tfrac{1}{3}\right), (9,0), (10,0)\right\}.$$

Oznaczmy przez d zbiór bułek pieczonych dzisiaj, przez w – zbiór bułek pieczonych wczoraj, przez p – przedwczoraj. Umówmy się, że wartość funkcji przynależności dana będzie równościami: $\mu(d) = 1$, $\mu(w) = 0,5$, $\mu(p) = 0,1$. Otrzymujemy zbiór rozmyty, który można traktować jako matematyczne ujęcie terminu „świeże bułki": bułki pieczone przedwczoraj są „świeże" w stopniu 0,1, bułki wczorajsze są „świeże" w stopniu 0,5, a dzisiejsze są rzeczywiście „świeże" (w stopniu 1).

Zauważmy, że zwykły zbiór można traktować jako zbiór rozmyty, a jego funkcją przynależności jest funkcja charakterystyczna.

Na zbiorach rozmytych można wykonywać działania podobnie jak na zbiorach zwykłych. Pokażemy, jak to można czynić, wskazując jednocześnie na pewne różnice.

Załóżmy, że w pewnym zbiorze rozważań X mamy dwa zbiory rozmyte A i B o funkcjach przynależności odpowiednio μ_A i μ_B.

Zbiory te są równe, gdy dla dowolnego x jest $\mu_A(x) = \mu_B(x)$. Mówimy zaś, że zbior A jest zawarty w zbiorze B, gdy $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$ dla każdego $x \in X$. Aby określić sumę $(A \cup B)$, część wspólną $(A \cap B)$ i uzupełnienie (A'), wystarczy podać wartości ich funkcji przynależności dla $x \in X$:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A\cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$
$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x).$$

Powyżej określone działania są uogólnieniem działań na zwykłych zbiorach i mają wiele własności tych działań.

$A \cup B = B \cup A$	– przemienność
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	– łączność
$A \cap B = B \cap A$	– przemienność
$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	– łączność
$\left.\begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array}\right\}$	– rozdzielność
$(A')' = A$	– inwolucja
$\left.\begin{array}{l} (A \cup B)' = A' \cap B' \\ (A \cap B)' = A' \cup B' \end{array}\right\}$	– prawa de Morgana

Nie mają jednak wszystkich własności. Np. nie są spełnione warunki $A \cup A' = X$, $A \cap A' = \emptyset$ ($\mu_\emptyset(x) \equiv 0$ i $\mu_X(x) \equiv 1$). Można to łatwo sprawdzić na przykładzie zbioru „kilka".

Przedstawione tutaj pojęcie zbioru rozmytego, zilustrowane kilkoma przykładami, znajduje szczególnie szerokie zastosowanie w naukach „miękkich", takich jak medycyna, ekonomia, psychologia. Występujące w nich określenia: zdrowy człowiek, mały popyt, duża wydajność, dobry pracownik, wysoka cena itp., często prowadzą, jak widzieliśmy, do wieloznaczności i nieporozumień, gdyż zawierają zbyt dużo „rozmycia".

Metody teorii zbiorów rozmytych bywają przedmiotem wielu dyskusji i znajdują obecnie coraz większe zastosowanie we wspomnianych wyżej naukach, a także w technice (np. teoria systemów i sterowania). Okazuje się bowiem, że problem „rozmycia" można badać ścisłymi metodami matematycznymi, a pewien sceptycyzm oraz nieufność w efekty tej nowej teorii wynikają zwykle z jej nieznajomości.