Ułamki łańcuchowe

Najprostsze rozwinięcie w ułamek łańcuchowy ma liczba $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

Jako curiosum powiemy jeszcze, że, wychodząc z rozwinięcia liczby $\overline{991}$, możnaby zapomocą niezbyt długich rachunków obliczyć, iż najmniejszym rozwiązaniem w liczbach naturalnych równania

$$u^2 - 991v^2 = 1$$

jest

$$u = 379516400906811930638014896080, \quad v = 12055735790331359447442538767.$$

Mamy tu pouczający przykład, jak może mylić indukcya, oparta jedynie na doświadczeniu. Podstawiając za v wartości kolejne 1,2,3,..., aż do 10^{28}, nie otrzymujemy rozwiązania równania $u^2 - 991v^2 = 1$, a jednak wnioskowanie stąd, że równanie to nie jest rozwiązalne w liczbach naturalnych byłoby błędne. Powyższy cytat pochodzi z książki Wacława Sierpińskiego „Teorja liczb" (Warszawa 1925). Opowiemy dalej, o jakim rozwinięciu liczby $\sqrt{991}$ mówi profesor Sierpiński. Chodzi tu o ułamki łańcuchowe.

Każdą liczbę niewymierną x można zapisać jako ułamek łańcuchowy

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}},$$

gdzie a_0 jest liczbą całkowitą i $a_1, a_2, \ldots$ są liczbami naturalnymi. Zapis powyższy oznacza, że x jest granicą ciągu tzw. reduktów R_n, gdzie

$$R_n = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots + \cfrac{1}{a_n}}}.$$

(Liczby wymierne dają się zapisać jako skończone ułamki łańcuchowe.) W dalszym ciągu będziemy dla oszczędności miejsca zapisywać równości podobne do powyższych jako

$$x = (a_0; a_1, \ldots), \quad R_n = (a_0; a_1, \ldots, a_n).$$

Oznaczmy $p_0 = a_0$, $q_0 = 1$, $p_1 = a_0a_1 + 1$, $q_1 = a_1$ oraz $p_n = a_np_{n-1} + p_{n-2}$, $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$ dla $n = 2, 3, \ldots$ Wtedy $R_n = \frac{p_n}{q_n}$, przy czym ułamek ten jest nieskracalny.

Łatwo podać wzór rekurencyjny na ciąg (a_n). Oznaczmy $x_0 = x$, $a_0 = [x_0]$ ($[t]$ część całkowita liczby t), wtedy

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \quad a_{n+1} = [x_{n+1}].$$

W przypadku gdy x jest pierwiastkiem (niewymiernym) równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych, ciąg (a_n) jest (poczynając od pewnego miejsca) okresowy. Zapisujemy to jako $x = (a_0; a_1, \ldots, a_p, \overline{a_{p+1}, \ldots, a_{p+s}})$ (gdy liczby $a_{p+1}, \ldots, a_{p+s}$ powtarzają się). Gdy niewymierna liczba $x > 1$ jest pierwiastkiem z liczby wymiernej, zapis staje się jeszcze prostszy $x = (a_0; \overline{a_1, \ldots, a_s})$.

Okazuje się, że znajomość rozwinięcia w ułamek łańcuchowy liczby $\sqrt{d}$ (d – liczba naturalna nie będąca kwadratem) pozwala znaleźć rozwiązania naturalne równania $u^2 - dv^2 = 1$. Jeśli $\sqrt{d} = (a_0; \overline{a_1, \ldots, a_s})$, to dla s parzystego wystarczy zapisać redukty $R_{s-1}, R_{2s-1}, R_{3s-1}, \ldots$ jako ułamki nieskracalne $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}, \ldots$ Pary (u_i, v_i) są szukanymi rozwiązaniami. Dla s nieparzystego rozwiązaniami są liczniki i mianowniki reduktów $R_{2s-1}, R_{4s-1}, R_{6s-1}, \ldots$

A teraz przepis na znalezienie ciągu (a_n) (dla liczby $\sqrt{d}$). Określamy

$$h = [\sqrt{d}], \quad e_0 = 1, \quad f_0 = 0$$

i następnie

$$a_{n-1} = \left[\frac{f_{n-1} + h}{e_{n-1}}\right], \quad f_n = a_{n-1}e_{n-1} - f_{n-1}, \quad e_n = \frac{d - f_n^2}{e_{n-1}}.$$

Układ ciągów (e_n, f_n) jest okresowy, a więc ciąg (a_n) też jest okresowy. Wystarczy znaleźć takie s, że $e_{s+1} = e_1$, $f_{s+1} = f_1$. Wtedy $\sqrt{d} = (a_0; \overline{a_1, \ldots, a_s})$.

Gdy za d weźmiemy liczbę 991, to „zapomocą niezbyt długich rachunków" otrzymujemy

$$\sqrt{991} = (31; \overline{2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6,}$$
$$\overline{4, 31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62}).$$

Uważny Czytelnik spostrzegł zapewne, iż ciąg liczb w nawiasie, poza pierwszą i ostatnią, jest symetryczny, a ostatnia to podwojona pierwsza – tak jest zawsze, gdy d jest liczbą wymierną większą od 1, która nie jest kwadratem liczby wymiernej.

Opracował dr Jerzy RYLL