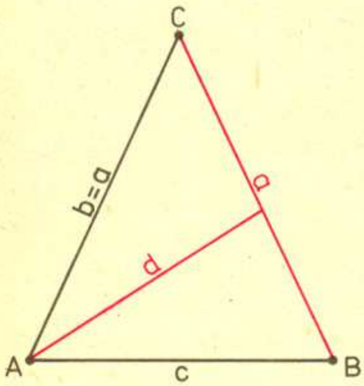
Twierdzenie Wantzela



Problem, któremu chcemy poświęcić nieco uwagi, będzie ściśle związany z konstrukcjami, aczkolwiek nie przeprowadzimy tu żadnych konstrukcji. Zajmiemy się pewnym niebezpieczeństwem, czyhającym na każdego próbującego coś skonstruować – niebezpieczeństwem, którego bardzo często nie jesteśmy świadomi. Ryzyko, o którym mowa, najlepiej ukaże często cytowany przykład.

Postawmy zadanie: *skonstruować za pomocą cyrkla i linijki taki trójkąt równoramienny o ramieniu długości a, że długość odcinka dwusiecznej poprowadzonej z kąta przy podstawie do ramienia równa jest d.* Zakładamy przy tym, że liczby a i d są tak dobrane, by poszukiwany trójkąt istniał.

Zadanie wygląda na standardowe i wielu od razu podjęłoby próby konstrukcji. W pewnych sytuacjach nie doprowadziłyby one jednak do sukcesu. Dlaczego? Okazuje się mianowicie, że konstrukcja jest niewykonalna. Argument, że nikomu nie udało się jej przeprowadzić, nie jest dobrym uzasadnieniem. Niewykonalność konstrukcji należy precyzyjnie udowodnić. I to jest poważnym problemem. No bo jak to zrobić?

Z pomocą przychodzi zaawansowana algebra. Zadanie konstrukcyjne możemy rozwiązywać nie tylko geometrycznie (za pomocą pomysłów i sztuczek). Można to zrobić także metodami algebraicznymi, sprowadzając problem konkretnej konstrukcji do rozwiązania odpowiedniego równania. Jeśli pierwiastki tego równania dadzą się skonstruować (tzn. możemy zbudować za pomocą cyrkla i linijki odcinki o długościach równych pierwiastkom), to i z figurą sobie poradzimy. A o tym, które liczby można w opisany powyżej sposób otrzymać, dokładnie wiadomo, zatem po ewentualnym rozwiązaniu równania wynik jest natychmiastowy.

W przypadku naszego zadania wykorzystamy następujące kryterium:

Pierwiastki równania trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych są konstruowalne za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma przynajmniej jeden pierwiastek wymierny.

Dowód tego kryterium jest trudny. Wymaga zastosowania matematyki niezwykle zaawansowanej. Mowa o teorii pierwiastnikowych rozszerzeń ciał, a konkretnie o tak zwanym twierdzeniu Wantzela.

Wypadałoby tu zapewne poświęcić tej teorii kilka zdań. Niestety, „wytoczona armata" jest na to zbyt wielka i ciężka.

Mając już do dyspozycji owo potężne narzędzie, przejdźmy do rozstrzygnięcia wyjściowego problemu. Zaznaczmy, że wykorzystywane twierdzenie zostało wypowiedziane całkowicie elementarnie.

Przedstawmy najpierw pewien wzór pozwalający wyrazić długość odcinka dwusiecznej za pomocą długości boków trójkąta

$$d^2 = bc\frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2},$$

gdzie a, b, c, są długościami boków trójkąta, d długością odcinka dwusiecznej poprowadzonej do boku a. Wzór ten na ogół nie jest podawany w szkole, jest jednak prosty do wykazania.

Rozważmy nasz problem przy konkretnie ustalonych liczbach: $a = d = 1$, trójkąt jest równoramienny, więc $a = b$, c jest długością podstawy. Czytelnik zechce sprawdzić, że przy tych założeniach szukany trójkąt istnieje. Nasz wzór przyjmuje postać $1 = c\frac{(c+1)^2 - 1}{(c+1)^2}$. Po elementarnych przekształceniach dostajemy równanie $c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0$. Znane jest proste twierdzenie mówiące o tym, że gdy liczba wymierna $\frac{m}{n}$ (przedstawiona w postaci ułamka nieskracalnego) jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, to m musi być dzielnikiem wyrazu wolnego, a n dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze. W naszym zatem przypadku ewentualnymi wymiernymi pierwiastkami równania mogłyby być tylko 1 lub -1. Żadne z nich równania jednak nie spełnia. Oznacza to, że konstrukcja, od której wystartowaliśmy, jest niewykonalna.

Owoce potężnej i zawiłej teorii dopomogły nam w rozwiązaniu problemu, wydawałoby się, zupełnie elementarnego. Naszą radość mąci jednak pytanie: czy musieliśmy z tej pomocy korzystać?

Brzmi to może nieprawdopodobnie, ale zastosowana metoda jest jedyną obecnie znaną.

dr Krzysztof CIESIELSKI,
dr Zdzisław POGODA