Twierdzenie ergodyczne

Proponuję Czytelnikowi zastanowić się nad ciągiem pierwszych cyfr zapisu dziesiętnego liczby 3^n. Niechaj zatem n–ty wyraz tego ciągu oznaczony przez c_n równy będzie pierwszej cyfrze liczby 3^n. Wypiszmy kilka początkowych potęg trójki: **1**, **3**, **9**, **27**, **81**, **243**, **729**, **2187**, **6561**, 19683, itd. Jakie reguły rządzą naszym ciągiem? Z pewnością pewne prawidłowości istnieją, np. po 1 nigdy nie nastąpi cyfra wyższa od 5, po 4 lub 5 zawsze nastąpi 1 itp. Cóż jednak odpowiedzieć, gdy ktoś zaproponuje taką grę:

Podajesz liczbę k spomiędzy 10 000 a 100 000. Wówczas oblicza on na szybkim komputerze wyrazy ciągu (c_n) aż do c_k włącznie. Za każdą 3 płacisz mu symboliczną stawkę 1 zł, za każde 7 lub 9 on płaci Tobie tyle samo.

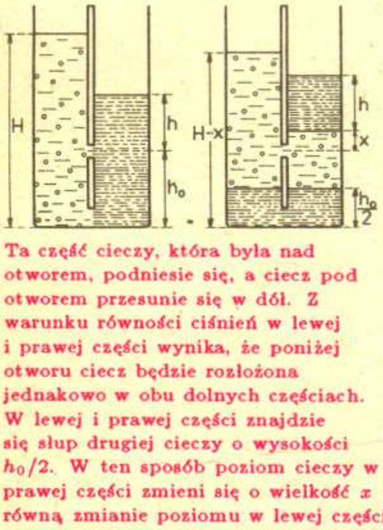
Po długim i chyba daremnym namyśle nad tą propozycją błysnąć może myśl następująca: może wartości ciągu (c_n) występują tak mniej więcej losowo, na chybił trafił? W końcu dziesiątka, będąca podstawą systemu pisania liczb, nie ma wiele wspólnego z trójką, której potęgi bierzemy pod uwagę. Przy dużej liczbie takich prób losowych, a 100 tysięcy wygląda na takową, średnia częstość występowania każdej z cyfr powinna dążyć do prawdopodobieństwa jej wylosowania, tj. do $\frac{1}{9}$. Zatem 7, 9 i 3 powinny wszystkie występować z tą samą częstością, zatem opłaca się grać. Zresztą nasza próbka dla paru pierwszych wyrazów ciągu potwierdza tę prawidłowość.

Oczywiście nie podejmuję się obrony tego rozumowania przed Czytelnikiem choć trochę zaznajomionym z rachunkiem prawdopodobieństwa, postaram się jednak w dalszym ciągu wykazać, że jakieś jądro racjonalne w nim jest.

Zanim jednak zabierzemy się do rozwiązywania naszego problemu, postaramy się go nieco przeformułować. Rozpatrzmy ciąg o wyrazach $a_n = n \log_{10} 3$ wraz z ciągiem (u_n) części ułamkowych liczb a_n. Zauważmy, że znajomość samej tylko liczby u_n pozwala wyznaczyć c_n. Istotnie, $3^n = 10^{a_n - u_n} \cdot 10^{u_n}$, przy czym pierwszy czynnik, będący naturalną potęgą dziesiątki, nie ma wpływu na cyfry rozwinięcia 3^n. Wnioskujemy stąd, że c_n jest równe pewnemu l spomiędzy 1 a 9 wtedy i tylko wtedy, gdy u_n zawiera się w przedziale $[\log_{10} l, \log_{10}(l+1))$. Wyobraźmy sobie dalej okrąg S o obwodzie 1 z ustalonym punktem p_0. Punkt p_n wybieramy tak, aby dodatnio zorientowany łuk (p_0, p_n) miał długość u_n. Zauważmy, że p_i powstaje z p_{i-1} przez obrót o kąt skierowany $2\pi \log_{10} 3$. Ponieważ położenie p_n na okręgu S wyznacza u_n, wyznacza też c_n. Zdarzeniu polegającemu na tym, że pewien c_n jest równy l, odpowiada łuk na S o długości $\log_{10}(1 + \frac{1}{l})$.

Nie przypadkiem użyłem w poprzednim zdaniu słowa zdarzenie. Spróbujmy spojrzeć na S jako na przestrzeń zdarzeń elementarnych. Różni się ona pod jednym istotnym względem od przestrzeni rozpatrywanych w elementarnym kursie rachunku prawdopodobieństwa – jest nieskończona. W takich sytuacjach zwykle nie ma sensu zadawanie rozkładu prawdopodobieństwa przez podanie prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń elementarnych, gdyż te z reguły są równe 0. My rozpatrzymy na S rozkład prawdopodobieństwa intuicyjnie określany jako jednostajny, który można przy tym scharakteryzować przez warunek, że prawdopodobieństwo tego, że punkt należy do łuku jest równe długości tego łuku. Hipotezę, którą całkiem mgliście postawiłem na początku artykułu, chciałoby się teraz sformułować tak: dla dowolnego punktu należącego do S częstość wpadania jego obrazów przy obrocie o kąt $2\pi \log_{10} 3$ do zbioru (zdarzenia) A dąży do prawdopodobieństwa A, gdy liczba rozpatrywanych obrazów dąży do nieskończoności.

Rozwiązanie zadania F 246. Ciecz będzie wyciekać przez otwór z lewej części powodując „rozerwanie" słupa cieczy w drugiej części.



Ta część cieczy, która była nad otworem, podniesie się, a ciecz pod otworem przesunie się w dół. Z warunku równości ciśnień w lewej i prawej części wynika, że poniżej otworu ciecz będzie rozłożona jednakowo w obu dolnych częściach. W lewej i prawej części znajdzie się słup drugiej cieczy o wysokości $h_0/2$. W ten sposób poziom cieczy w prawej części zmieni się o wielkość x równą zmianie poziomu w lewej części. Oznaczmy przez h wysokość poziomu cieczy do momentu rozpoczęcia przeciekania w prawej części powyżej otworu, a przez H wysokość poziomu w lewej części. Z warunku równości ciśnień na dole $(h + h_0)\rho_2 = H\rho_1$ i z warunku równości ciśnień na poziomie otworu po zakończeniu przeciekania: $h\rho_2 + x\rho_1 = (H - h_0 - x)\rho_1$ wynika, że $x = \frac{h_0}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)$.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

ZMARŁ KLAUS FUCHS

Nazwisko Klausa Fuchsa wiąże się z historią fizyki jądrowej i budową bomby atomowej w Los Alamos (USA) w czasie drugiej wojny światowej. Fuchs był synem niemieckiego pastora luterańskiego, członkiem Komunistycznej Partii Niemiec i jednym z najzdolniejszych uczniów Maxa Borna. Idąc śladami swojego mistrza, który opuścił hitlerowskie Niemcy, Fuchs zbiegł w 1933 roku do Anglii. Pracował tam z Nevill Mottem w Bristolu, następnie z Maxem Bornem w Edynburgu i w końcu w 1941 roku trafił do zespołu kierowanego w Birmingham przez kolejnego uciekiniera Rudolfa Peierlsa z Berlina. Zespół ten zajmował się problemami rozszczepienia jądra atomowego i w 1941 roku prowadził obliczenia dotyczące ilości uranu 235 potrzebnego do wywołania eksplozji atomowej, współpracując początkowo nieformalnie, a później już ściśle z uczonymi znajdującymi się w Stanach Zjednoczonych. Od końca 1943 roku Fuchs przebywał już w USA, a w okresie od sierpnia 1944 roku do czerwca 1945 roku w samym centrum amerykańskich badań atomowych – Los Alamos, pracując nad bombą plutonową, zrzuconą później na Nagasaki. Po wojnie objął on kierownictwo oddziału fizyki teoretycznej w Harwell (Anglia). Po kilku latach Amerykanie odszyfrowali depeszę, wysłaną w 1944 roku z Nowego Jorku do Moskwy, dotyczącą badań jądrowych i jednoznacznie wskazującą Fuchsa jako źródło informacji. W międzyczasie sam Fuchs w rozmowach z agentem kontrwywiadu brytyjskiego opowiedział, iż od początków 1942 roku do wiosny 1949 roku przekazywał do ZSRR wszystkie dostępne mu tajemnice atomowe. Ostatecznie 27 stycznia 1950 roku został on aresztowany i następnie skazany na 14 lat więzienia. W 1959 roku został zwolniony za dobre sprawowanie i wyjechał do NRD. Był tam inicjatorem programu wykorzystania energii jądrowej, szefem ośrodka badań atomowych w pobliżu Drezna i członkiem KC NSPJ. W 1979 roku przeszedł na emeryturę, zmarł w styczniu 1988 roku w wieku 76 lat. Zdaniem P. Grudzińskiego, historyka zajmującego się dziejami bomby atomowej: "...dla odkrycia zasadniczego sekretu, czyli faktu, że Stany Zjednoczone podjęły szeroko zakrojone prace nad bombą atomową, nie potrzeba było informacji Fuchsa." (Uczeni i barbarzyńcy, Polityka nuklearna Stanów Zjednoczonych 1939–1945, PWN Warszawa 1987, s.124). Grudziński powołuje się przy tym na I. Gołowina (biografa "ojca radzieckiej bomby atomowej" I. W. Kurczatowa) twierdzącego, że "w tym czasie" (tj. około połowy roku 1942) rząd radziecki dysponował informacjami o projekcie amerykańskim. Natomiast ostatnio akademik Andriej Sacharow potwierdził na łamach pisma "Moskowskie Nowosti", iż Fuchs rzeczywiście przekazał do ZSRR założenia teoretyczne amerykańskiej bomby atomowej, a co najważniejsze – podał w 1942 r., że stworzenie takiej bomby jest w ogóle możliwe, i że nad tym się pracuje. Z kolei jeden z twórców pokazywanego niedawno przez polską telewizję filmu "Ryzyko" – Barszczewski j oświadczył, że obecnie przygotowywuje film o życiu i działalności Fuchsa. Ponadto w 1987 roku ukazały się dwie książki: N. Moss "Klaus Fuchs: The Man Who Stole The Atom Bomb" w Anglii oraz R. C. Williams "Klaus Fuchs, Atom Spy" w USA, które zawierają tekst zeznań Fuchsa. Tak więc, ten niezwykle interesujący aspekt historii XX wieku jest coraz bliższy pełnego wyjaśnienia.

Od dawna wiadomo, że tak postawiona hipoteza jest fałszywa. Niezwykle łatwo jest bowiem podać kontrprzykład. Niech punkt x będzie dowolnie wybrany na S i niech A będzie zbiorem składającym się z ciągu, którego wyrazami są obrazy punktu x przy iteracjach obrotu. Jest jasne, że dla punktu x częstość wpadania jego obrazów w A jest równa 1, ale dla wielu innych punktów, np. leżących w wymiernej odległości od x, częstość jest równa 0. Dlatego też żądamy zwykle, aby prawdopodobieństwo tego, że punkt x wpadnie kiedyś do zbioru A, było równe 1, jeśli tylko prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia A jest dodatnie. Mówimy wtedy, że obrót jest **ergodyczny** względem prawdopodobieństwa P.

Twierdzenie

Obrót na okręgu o kąt a jest ergodyczny względem jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy a jest niewspółmierne z π, tj. gdy α/π nie jest liczbą wymierną.

Twierdzenie to niemal od razu pozwoli nam podjąć słuszną decyzję w sprawie przystąpienia do ewentualnej gry. Udowodnimy mianowicie następujący

Wniosek

Dla dowolnego punktu x, należącego do S oraz łuku A, częstość wpadania obrazów x pod działaniem obrotu o $2\pi \log_{10} 3$ dąży do długości A.

Dowód

Sprawdźmy, że obrót ten jest ergodyczny. Wobec Twierdzenia wystarczy w tym celu wykazać jedynie, że liczba $\log_{10} 3$ jest niewymierna. Gdyby tak nie było, zachodziłaby równość $\log_{10} 3 = \frac{p}{q}$ z pewnymi naturalnymi p i q. Stąd wnosilibyśmy, że $3 = 10^{\frac{p}{q}}$, a zatem $3^q = 10^p$, co przecież zdarzyć się nie może, bo lewa strona dzieli się przez 3, a prawa nie. Z ergodyczności wynika nasz wniosek dla zbioru wartości x miary 1.

Oznaczmy przez $f_n(x, A)$ częstość wizyt punktu x w zbiorze A przy n obrotach, tzn. liczbę $\frac{k}{n}$, gdzie k oznacza liczbę tych nieujemnych liczb całkowitych $i < n$, dla których i-ty obraz punktu x należy do A. Chcemy wykazać, że ciąg $f_n(x, A)$, przy n dążącym do nieskończoności, przy dowolnym x i A będącym łukiem, jest zbieżny do długości łuku A (oznaczanej przez $dl(A)$). W tym celu wystarczy wykazać, że dla dowolnego ε istnieje takie M, że dla dowolnego $n > M$ mamy

$$|f_n(x, A) - dl(A)| < \varepsilon.$$

Wybierzmy łuki: B zawarty w A oraz C zawierający A tak, by ich końce leżały w odległości $\frac{\varepsilon}{3}$ od końców A. Wybierzmy dalej punkty y oraz z w odległości od x mniejszej od $\frac{\varepsilon}{3}$ tak, aby ciągi $f_n(y, B)$ i $f_n(z, C)$ były zbieżne odpowiednio do długości łuków B i C. Zwróćmy uwagę, że gdyby np. taki punkt y nie istniał, to zdarzenie, polegające na tym, że ciąg $f_n(t, B)$ nie jest zbieżny do długości B, miałoby prawdopodobieństwo nie większe od $1 - \frac{2\varepsilon}{3}$, wbrew ergodyczności obrotu. Dalej zauważmy, że jeśli i-ty obraz y wpada w B, to i-ty obraz x wpada w A, jeśli zaś i-ty obraz x wpada w A, to i-ty obraz z wpada w C. Stąd otrzymujemy nierówność

$$f_n(y, B) \le f_n(x, A) \le f_n(z, C).$$

Istnieje zatem takie M, że jeśli $n > M$, to

$$f_n(y, B) > dl(B) - \frac{\varepsilon}{3} = dl(A) - \frac{3\varepsilon}{3} = dl(A) - \varepsilon$$

$$f_n(y, C) < dl(C) + \frac{\varepsilon}{3} = dl(A) + \frac{3\varepsilon}{3} = dl(A) + \varepsilon.$$

Wobec tego

$$dl(A) - \varepsilon < f_n(y, B) \le f_n(x, A) \le f_n(z, C) < dl(A) + \varepsilon.$$

Zatem

$$|f_n(x, A) - dl(A)| < \varepsilon.$$

c.n.d.

W ten sposób mamy już odpowiedź na pytanie postawione na wstępie. Częstość występowania cyfry 3 w ciągu (c_n) dąży do $\log_{10}(1 + \frac{1}{3})$, częstość występowania 7 i 9 do $\log_{10}(\frac{8}{7}) + \log_{10}(\frac{10}{9}) = \log_{10}(\frac{80}{63})$. Ponieważ $\frac{4}{3}$ jest większe od $\frac{80}{63}$, wbrew wszelkim pozorom proponowana gra na 7 i 9 przyniosłaby nam straty.

dr Grzegorz ŚWIĄTEK