Norma 2–adyczna

Kwadrat nie może być podzielony na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach.

Nim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia, przedstawimy dwa ogólne rezultaty, na których będziemy się opierali. Dowód pierwszego z nich wymaga zaawansowanych rozważań algebraicznych, których przedstawienie przekracza możliwości tego artykułu.

1. W zbiorze liczb rzeczywistych można wprowadzić tzw. normę 2–adyczną, tzn. określić funkcję, przyporządkowującą dowolnej liczbie rzeczywistej x liczbę rzeczywistą nieujemną $\|x\|$, spełniającą warunki:

a) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

b) $\|\frac{1}{2}\| = 2$.

Dla dowolnych liczb x, y

c) $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$,

d) $\|x + y\| \le \max(\|x\|, \|y\|)$.

Z c) wynika, że $\|1\| = \|1\| \cdot \|1\|$, a więc $\|1\| = 1$. Podobnie, $\|-1\| \cdot \|-1\| = 1$, czyli $\|-1\| = 1$. W konsekwencji, dla dowolnego x mamy $\|-x\| = \|x\|$.

Norma 2–adyczna ma również własność:

e) jeśli $\|x\| > \|y\|$, to $\|x + y\| = \|x\|$.

Istotnie, na podstawie d) mamy $\|x + y\| \le \max(\|x\|, \|y\|) = \|x\|$. Z drugiej strony, $\|x\| = \|x + y + (-y)\| \le \max(\|x + y\|, \|y\|)$. Stąd i z faktu, że $\|y\| < \|x\|$ wynika, że $\|x\| \le \|x + y\|$. W konsekwencji $\|x\| = \|x + y\|$.

Nietrudno teraz zauważyć, że jeśli niezerową liczbę wymierną w przedstawimy w postaci $w = 2^k \cdot \frac{p}{q}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś p, q – liczbami całkowitymi nieparzystymi, to $\|w\| = 2^{-k}$.

2. Załóżmy, że pewien czworokąt na płaszczyźnie podzielono na trójkąty i każdy z wierzchołków trójkątów podziału pomalowano na jeden z trzech kolorów: zielony, niebieski, czerwony w ten sposób, że na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów oraz że dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta są pomalowane jednym kolorem, a dwa pozostałe – pozostałymi. Wówczas pewien trójkąt podziału ma wierzchołki różnokolorowe.

Załóżmy, że jednokolorowe wierzchołki czworokąta są niebieskie. Boki trójkątów podziału są podzielone przez wierzchołki różnych trójkątów na odcinki. Zauważmy że na obwodzie trójkąta, którego wierzchołki nie są różnokolorowe, leży parzysta liczba odcinków, których jeden koniec jest niebieski, a drugi czerwony. Jeśli więc żaden trójkąt podziału nie ma różnokolorowych wierzchołków, to sumując liczby takich odcinków na obwodach tych trójkątów, otrzymamy liczbę parzystą. Zauważmy, że przy tym sumowaniu każdy odcinek, który nie leży na obwodzie czworokąta, był liczony dwukrotnie, a każdy odcinek z obwodu – jednokrotnie. Wynika stąd, że liczba tego typu odcinków, leżacych na obwodzie czworokąta, jest parzysta. Jest to jednak niemożliwe, bo na boku czworokąta o końcach niebieskich leży parzysta ich liczba, a na pozostałych nieparzysta.

Przejdziemy teraz do dowodu sformułowanego na początku twierdzenia. Ponieważ norma 2–adyczna jest funkcją przyjmującą wartości rzeczywiste nieujemne, więc możemy podzielić płaszczyznę na trzy rozłączne zbiory:

$$Z = \{(x, y) : \|x\| < 1, \quad \|y\| < 1\}, \qquad N = \{(x, y) : \|x\| \ge 1, \quad \|x\| \ge \|y\|\},$$
$$C = \{(x, y) : \|x\| < \|y\|, \quad \|y\| \ge 1\}.$$

Pomalujmy punkty pierwszego z tych zbiorów na zielono, drugiego na niebiesko i trzeciego na czerwono. Zauważmy, że

I. Jeśli (x_1, y_1) jest punktem zielonym, a (x_2, y_2) – niebieskim (czerwonym), to $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ jest punktem niebieskim (czerwonym).

Istotnie, gdy (x_2, y_2) jest punktem niebieskim, to z własności normy 2–adycznej otrzymamy, że $\|x_2 - x_1\| = \|x_2\| \ge 1$. Ponieważ $\|x_2\| \ge \|y_2\|$ oraz $\|y_1\| < 1$, więc $\|x_2 - x_1\| \ge \max(\|y_2\|, \|y_1\|) \ge \|y_2 - y_1\|$. Punkt $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ jest więc też niebieski. Dowód dla punktu czerwonego jest podobny.

Rozwiązanie zadania M 508.
Niech p będzie prawdopodobieństwem otrzymania orła w pojedynczym rzucie, $q = 1 - p$; niech u_n oznacza szukane prawdopodobieństwo .
Mamy $u_n = qu_{n-1} + p(1 - u_{n-1})$. Istotnie, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł, w pozostałych ma wypaść nieparzysta liczba orłów. Jeśli reszka — parzysta. Zauważmy, że $u_n - \frac{1}{2} = (q - p)(u_{n-1} - \frac{1}{2})$. Ponieważ $u_0 = 1$, mamy $u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(q - p)^n$, czyli $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q - p)^n$.

Rozwiązanie zadania M 510.
Ponieważ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, mamy

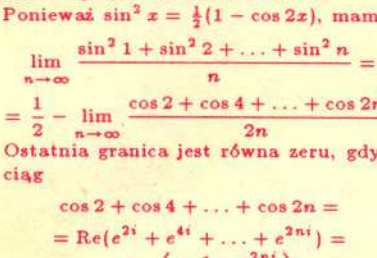
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \ldots + \sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty} \frac{\cos 2 + \cos 4 + \ldots + \cos 2n}{2n}.$$

Ostatnia granica jest równa zeru, gdyż ciąg

$$\cos 2 + \cos 4 + \ldots + \cos 2n = \mathrm{Re}(e^{2i} + e^{4i} + \ldots + e^{2ni}) = \mathrm{Re}\left(e^{2i}\frac{1 - e^{2ni}}{1 - e^{2i}}\right)$$

jest ograniczony. Szukana granica jest więc równa $\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie zadania F 247.
Oznaczmy przez α stosunek objętości lodu do objętości zajmowanej przez lód porowaty, przez β – część lodu, która uległa stopieniu.



Objętość wody, która powstała przy topnieniu lodu, jest równa

$$V_w = \alpha \cdot \beta \cdot h \cdot k \cdot S,$$

gdzie S jest polem powierzchni przekroju szklanki. Pozostała masa lodu wynosi (ρ – gęstość lodu)

$$m_L = (1 - \beta)\alpha \cdot h \cdot \rho \cdot S.$$

Korzystając z prawa Archimedesa otrzymujemy objętość zanurzonej części lodu

$$V_1 = (1 - \beta)\alpha \cdot h \cdot k \cdot S,$$

a stąd wysokość poziomu wody

$$H = \frac{V_w + V_1}{S} = \alpha \cdot h \cdot k = 0,54\ h.$$

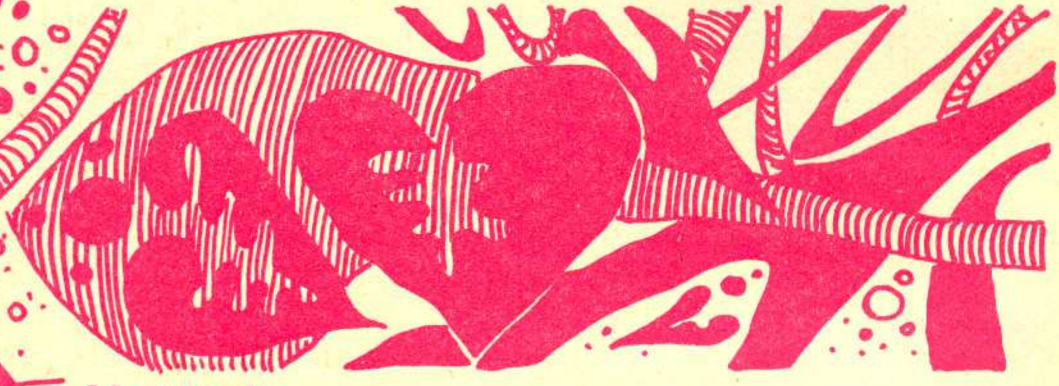
Od momentu, gdy lód zaczyna pływać w wodzie, dalsze topnienie nie ma wpływu na poziom wody w szklance.

II. Na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów.

Załóżmy, że jest inaczej. Przesuwając prostą, na której leżą punkty wszystkich trzech kolorów, równolegle w ten sposób, by punkt zielony przeszedł na (0,0) i korzystając z I. możemy założyć, że punkt czerwony (x_1, y_1) i niebieski (x_2, y_2) leżą na prostej przechodzącej przez (0,0). Istnieje więc liczba λ taka, że $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$. Zatem $\|x_1\| = \|\lambda\|\|x_2\|$, $\|y_1\| = \|\lambda\|\|y_2\|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\lambda \neq 0$, więc $\|x_2\| < \|y_2\|$, co jest niemożliwe.

Załóżmy, że kwadrat o wierzchołkach (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) podzielono na n trójkątów o równych polach. Wierzchołek (0,0) jest zielony, (0,1) – czerwony, a dwa pozostałe – niebieskie. W myśl 2, któryś z trójkątów podziału ma różnokolorowe wierzchołki. Przesuńmy ten trójkąt równolegle tak, by wierzchołek zielony przeszedł na (0,0). Z I. wynika, że pozostałe wierzchołki nie zmienią kolorów. Załóżmy, że po przesunięciu wierzchołkiem czerwonym jest (x_1, y_1), a niebieskim – (x_2, y_2). Pole trójkąta o wierzchołkach (0,0), (x_1, y_1), (x_2, y_2) jest równe $\frac{1}{n} = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\|x_2\| \geq \|y_2\|$, więc $\|x_1y_2\| < \|x_2y_1\|$. Zatem $\|\frac{1}{n}\| = \|\frac{1}{2}\|\|x_2\|\|y_1\| \geq 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$. Wynika stąd, że n jest liczbą parzystą, gdyż jak zauważyliśmy, dla nieparzystego n mamy $\|\frac{1}{n}\| = 1$.

doc.dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Martyngały

Jak dobrze wiadomo Czytelnikom *Delty*, przy wielokrotnym rzucie symetryczną monetą do uzyskania orła potrzebne są średnio dwa rzuty (zadanie **M 469** *Delta* 5/1987). Jasne jest, że taka sama jest średnia liczba rzutów potrzebna do otrzymania reszki. A co się dzieje przy oczekiwaniach na serię długości dwa? Wówczas sytuacja zmienia się radykalnie. Jak nietrudno sprawdzić, średnia liczba rzutów potrzebna do uzyskania dwóch orłów pod rząd jest 6, natomiast dla uzyskania serii (**O**,**R**) potrzeba średnio tylko 4 rzuty. Różnice te są jeszcze bardziej widoczne przy oczekiwaniach na dłuższe serie; i tak na przykład do uzyskania serii (**O**,**O**,**R**,**R**,**O**,**O**) potrzeba średnio 70 rzutów, dla serii (**O**,**O**,**O**,**O**,**O**,**O**) aż 126, podczas gdy dla serii (**O**,**O**,**O**,**O**,**O**,**R**) wystarczają średnio 64 rzuty, czyli prawie dwukrotnie mniej! Obliczenie czasów oczekiwania w tym przypadku wymaga dość żmudnych rachunków. Okazuje się jednak, że przy użyciu podstawowych faktów z teorii martyngałów można łatwo wyliczać średnie czasy oczekiwania na serię dowolnej (skończonej) długości przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia nawet bardziej skomplikowanego niż rzut monetą.

Sprecyzujmy dokładnie problem. Załóżmy, że powtarzamy wielokrotnie doświadczenie losowe Z, w pojedynczej próbie możemy otrzymać co najwyżej przeliczalną liczbę wyników (każdy z dodatnim prawdopodobieństwem). Oznaczmy zbiór tych wyników przez W. Niech $A = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$ będzie dowolnym ciągiem, którego wyrazami są elementy zbioru W i oznaczmy przez T_A pierwszy moment pojawienia się serii A w ciągu powtórzeń doświadczenia Z. Pytamy się, ile razy trzeba średnio powtórzyć doświadczenie Z, by uzyskać serię A.

Probabilistyczny model jest następujący: dana jest dyskretna zmienna losowa Z o zbiorze wartości W oraz ciąg $(Z_1, Z_2, \ldots)$ niezależnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej (Ω, P) o rozkładach prawdopodobieństwa takich samych jak rozkład Z. Wtedy T_A jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, określoną następująco

$$T_A(\omega) = \min\{k : Z_k(\omega) = a_m, \quad Z_{k-1}(\omega) = a_{m-1}, \ldots, Z_{k-m+1}(\omega) = a_1\}.$$