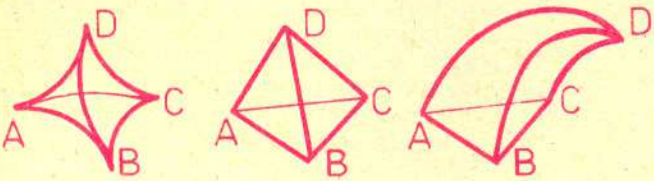
mała delta

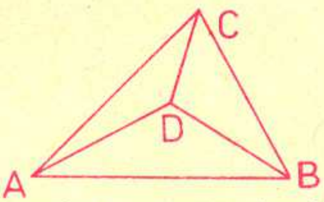
Co da się naprawdę narysować?

Zapewne każdy z Was starał się kiedyś narysować na kartce papieru jakąś bryłę, np. domek, konia, koleżankę lub po prostu – czworościan:

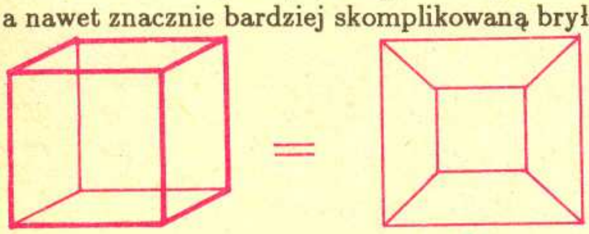


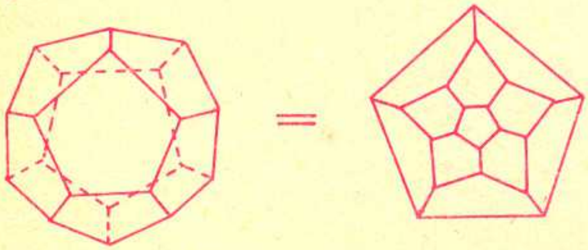
Niezależnie od tego, co chcemy narysować, zwykle ograniczamy się do zaznaczenia na papierze konturów naszej bryły. Obrazek składa się więc ze skończonego układu punktów i łączących je łuków – matematycy zwykli nazywać taki obiekt geometryczny grafem.

Wszystkim narysowanym wyżej obrazkom można zarzucić, że nie są „prawdziwe": krawędzie AC i BD przecinają się na papierze, choć w rzeczywistości leżą daleko od siebie. A przecież piramidę można narysować „naprawdę". Wystarczy ustawić oko nad jej wierzchołkiem i narysować, co widać w dole:



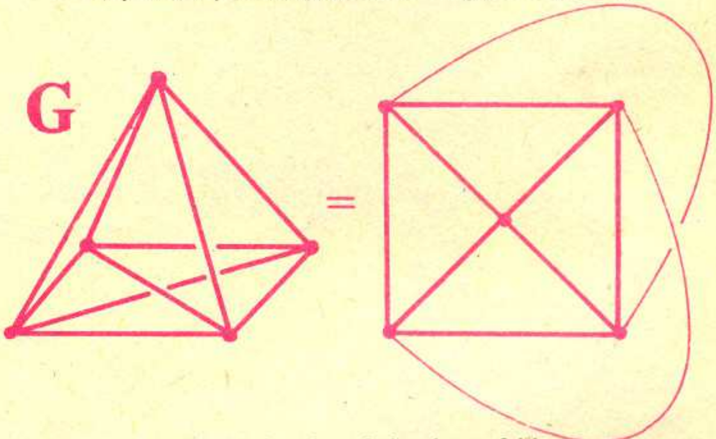
Podobnie możemy narysować pudełko (sześcian), a nawet znacznie bardziej skomplikowaną bryłę:



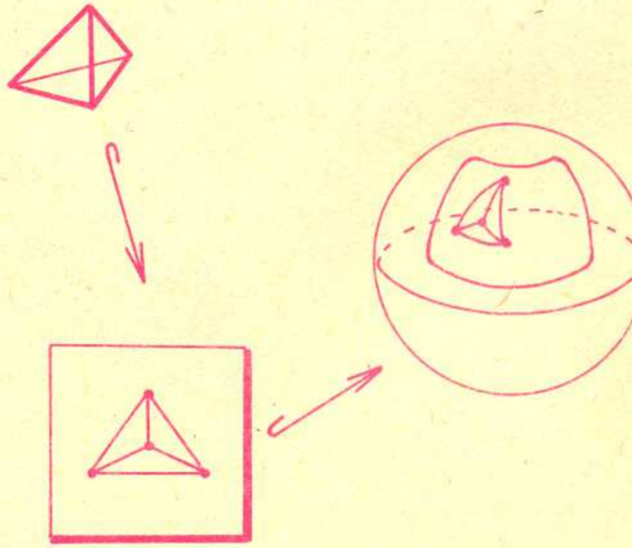


Jednakże nie każdy graf leżący w przestrzeni można narysować „naprawdę", to jest tak, by krawędzie nie przecinające się w rzeczywistości nie przecinały się też na obrazku. Nie uda się to np. z narysowanym niżej grafem G (spróbujcie !).

G

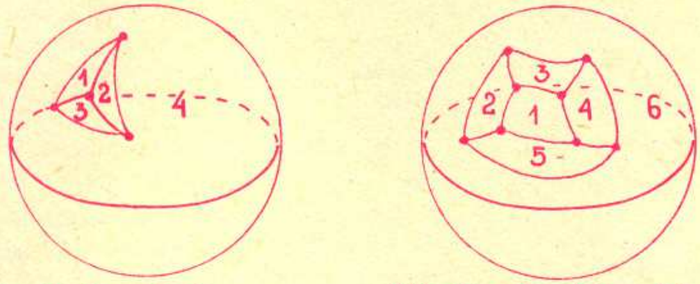


Oczywiście, to, że nie udaje się zrobić „prawdziwego" rysunku, nie jest dostatecznym argumentem za tym, iż wykonanie takiego obrazka jest w ogóle niemożliwe. Potrzebujemy dowodu matematycznego, który wygląda tak. Załóżmy, że graf G da się jakimś cudem „naprawdę" narysować na płaszczyźnie. Wtedy możemy go też „naprawdę" narysować na sferze (powierzchni kuli).



Obraz naszego grafu rozetnie sferę na kilka obszarów (państw). Niech W oznacza liczbę wierzchołków grafu (grube kropki), K – liczbę krawędzi (łuki łączące kropki), a P – liczbę państw. Można udowodnić, że dla każdego grafu narysowanego na sferze zachodzi wzór (pochodzący od Eulera)

$$(*) \qquad W - K + P = 2.$$

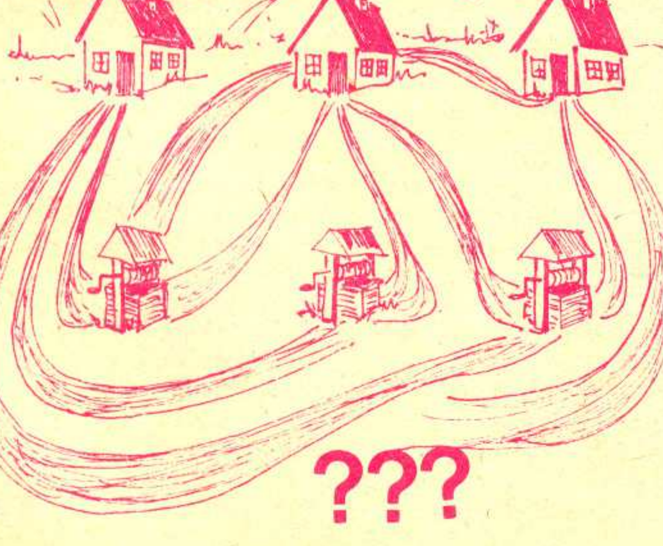


W=4, K=6, P=4, W=8, K=12, P=6,

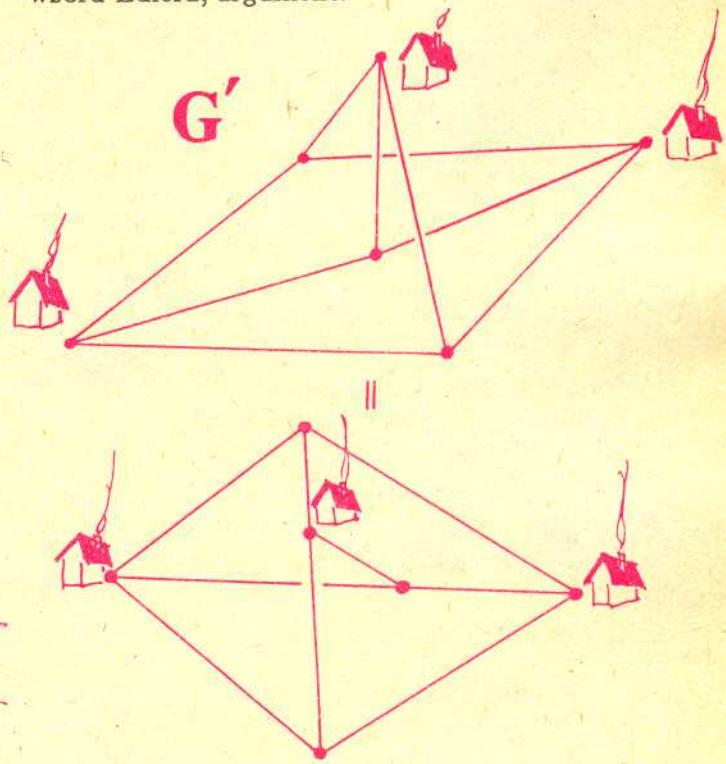
Sprawdź sam na swoich przykładach !

Wróćmy do naszego grafu G, o którym przypuściliśmy, że da się narysować na sferze. Z obrazka G widzimy, że $W = 5$ i $K = 10$. A ile jest państw? To obliczymy łatwo ze wzoru $(*)$: $5 - 10 + P = 2$, stąd $P = 7$. Zauważmy, że dodanie liczby boków wszystkich państw da nam podwojoną liczbę krawędzi (każdą liczyliśmy dwukrotnie). Ponieważ każde państwo jest co najmniej trójkątem, to powyższa suma jest równa co najmniej $7 \cdot 3 = 21$. Tak więc, z założenia, że G da się narysować „naprawdę", wyprowadziliśmy wniosek, iż $21 \leq 20$. Zatem „prawdziwy" rysunek dla G nie istnieje.

Wielu z Was zetknęło się zapewne z następującą łamigłówką o trzech zwaśnionych gospodarzach i o trzech studniach. Każdy z gospodarzy chciał mieć ścieżkę od swojego domu do każdej ze studni, poprowadzoną tak, by po drodze nie spotykać żadnego z sąsiadów. Czy taki układ ścieżek istnieje?



Naprawdę pytamy tu o to, czy następujący graf G' da się narysować „naprawdę". Spróbujcie to rozstrzygnąć sami. Postępując z grafem G' tak, jak zrobiliśmy to z grafem G nie uzyskamy odpowiedzi. Potrzebny będzie jeszcze inny, oprócz wzoru Eulera, argument.



Grafy G i G' są specjalne. Polski topolog, Kazimierz Kuratowski udowodnił w 1930 roku, że G i G' są jedynymi minimalnymi grafami, które nie dadzą się narysować „naprawdę". Graf nazwiemy minimalnym, jeśli nie ma zbędnych wierzchołków (postaci ——•——) oraz jeśli usunięcie z niego dowolnej krawędzi pozwala go już narysować „naprawdę".

Małą Deltę przygotował Zbigniew MARCINIAK