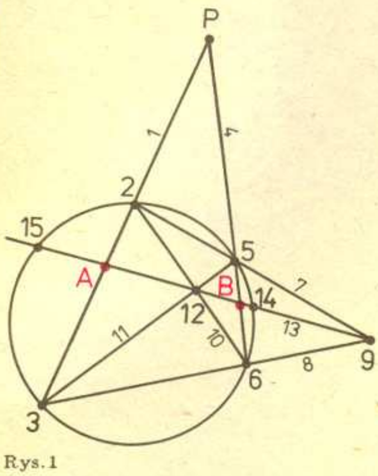
# Korelacje biegunowe




Rys. 1

Zadanie: Posługując się jedynie linijką skonstruować styczną przez dany punkt do danego okręgu.

Rozwiązanie: Przez punkt $P$ prowadzimy (jakąś) prostą 1 przecinającą okrąg w punktach 2 i 3. Powtarzamy tę czynność: przez $P$ prowadzimy (inną) prostą 4 przecinającą okrąg w punktach 5 i 6. Prosta 7 przechodząca przez 2 i 5 przecina prostą 8 przechodzącą przez 3 i 6 w punkcie 9. Podobnie prosta 10 przez 2 i 6 przecina prostą 11 przez 3 i 5 w punkcie 12. Punkty 14 i 15 otrzymujemy w przecięciu prostej 13 poprowadzonej przez punkty 9 i 12 z okręgiem. Proste $P14$ i $P15$ są styczne do okręgu. Ale dlaczego?

Bardzo dowolny sposób obrania prostych 1 i 4 utrudnia zastosowanie zwykłych metod geometrycznych. Poprawność konstrukcji można za to dość prosto uzasadnić, gdy zna się geometrię rzutową.

Pomysł geometrii rzutowej polega na tym, by poza zwykłymi punktami geometrii euklidesowej posługiwać się również punktami „w nieskończoności" - punktami wspólnymi prostych równoległych. Łatwo wpaść na taki pomysł obserwując pobocza ginącej na horyzoncie drogi - są równoległe, ale na horyzoncie się zbiegają.

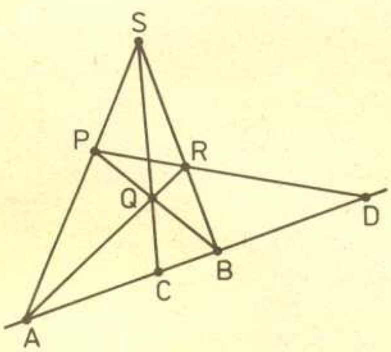
W ten sposób płaszczyzna została wzbogacona nowymi (licznymi) punktami i jedną (z nich złożoną) prostą - horyzontem.

Pierwsze spostrzeżenie, jakiego dokonano, to stwierdzenie równoprawności punktów i prostych na płaszczyźnie rzutowej. Dowolne dwa punkty mają „swoją" prostą, dowolne dwie proste mają „swój" punkt. Okazało się, że każde twierdzenie o punktach i prostych płaszczyzny rzutowej pozostaje prawdziwe, gdy napiszemy je zamieniając miejscami nazwy punktów z nazwami prostych. Zastanowiono się też nad tym, jakie własności może mieć funkcja realizująca tę zamianę. Funkcję taką (zamieniającą punkty na proste i proste na punkty tak, by wszystkie własności geometryczne były zachowane) nazwano korelacją.

Spośród różnych korelacji wyróżniają się te, które mają następującą własność:

$$\phi(A) = k \quad \leftrightarrow \quad \phi(k) = A,$$

czyli jeśli punkt przechodzi na jakąś prostą, to równocześnie ta prosta przechodzi na ten punkt. Korelacje te nazwano biegunowymi, a odpowiadające sobie punkt i prostą - biegunem i biegunową. Von Staudt udowodnił, że zbiór punktów leżących na swojej biegunowej (w danej korelacji) - o ile jest niepusty - jest stożkową (hiperbolą, parabolą, elipsą; w szczególności może być okręgiem). Zbiór zaś owych biegunowych składa się ze wszystkich stycznych do tej stożkowej i to w odpowiadających im punktach.




Rys. 2

W naszym zadaniu prosta 13 okaże się biegunową $P$. Aby się o tym przekonać, musimy wspomnieć o jeszcze jednym pojęciu i jeszcze jednym twierdzeniu. Jeżeli dla czterech punktów $A$, $B$, $C$, $D$, leżących na prostej, istnieje czworokąt $PQRS$ taki, że proste $PS$ i $QR$ przechodzą przez $A$, $PQ$ i $RS$ przez $B$, $QS$ - przez $C$ i $PR$ - przez $D$, to czwórkę $(A, B, C, D)$ nazywamy harmoniczną. Dla dowolnych trzech współliniowych i różnych punktów $A$, $B$, $C$ istnieje dokładnie jeden punkt $D$, taki, że $(A, B, C, D)$ jest harmoniczna.

Seydewitz wykazał, że jeśli prosta $l$ przecina stożkową w punktach $K$ i $L$, to biegunowa dowolnego punktu $M$ z prostej $l$ przecina prostą $l$ w takim punkcie $N$, że $(K, L, M, N)$ jest harmoniczna. Spójrzmy na rysunek 1. Czworokąt 9, 6, 12, 5 pokazuje, że $(2, 3, P, A)$ jest harmoniczna, a ponieważ ostatni z tych punktów jest wyznaczony jednoznacznie, więc $A$ (punkt przecięcia 13 i 1) leży na biegunowej punktu $P$. Podobnie obserwując czworokąt 12, 2, 9, 3 i prostą 4 stwierdzamy, że $B$ (punkt przecięcia 13 i 4) leży na biegunowej punktu $P$. Tą biegunową musi więc być prosta 13.

A jak stąd wynika, że proste $P14$ i $P15$ są styczne? Już bardzo prosto. Oznaczmy przez $\phi$ korelację biegunową odpowiadającą naszemu okręgowi. Zatem 14 i 15 leżą na $\phi(P)$. Ponieważ $\phi$ jest korelacją biegunową (patrz określenie korelacji i korelacji biegunowej), więc $\phi(14)$ i $\phi(15)$ przechodzą przez $P$. Ale z twierdzenia von Staudta wynika, że $\phi(14)$ i $\phi(15)$ są styczne do okręgu w punktach 14 i 15. Koniec uzasadnienia konstrukcji.

Przy okazji okazało się, że podany tu sposób konstrukcji samą linijką stycznych do okręgu jest dobry także dla rysowania stycznych do hiperboli, paraboli i elipsy (gdzie z cyrkla i tak pożytek byłby mały).

*dr hab. Marek KORDOS*