Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie chociaż jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1988

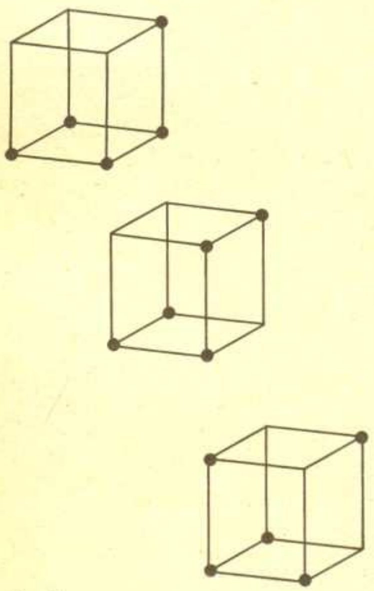
Przypominamy treść zadań:

165. Funkcja różniczkowalna $f{:}(0;\infty) \to \mathbf{R}$ spełnia warunek: $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

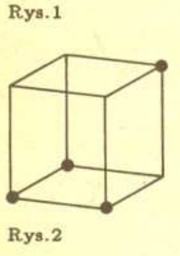
166. Niech K będzie sześcianem jednostkowym o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni $\mathbf{R}^3$ i niech będzie dany punkt kratowy P. Udowodnić, że spośród ośmiu odległości punktu P od wierzchołków K co najmniej cztery są liczbami niewymiernymi.

165. Odpowiedź jest twierdząca. Aby to wykazać, przypuśćmy, że jest inaczej. Mamy wtedy dwie możliwości: 1^0 granica $\lim f(x)$ przy $x \to \infty$ istnieje (skończona lub nieskończona), ale jest różna od zera; 2^0 granica ta nie istnieje. W przypadku 1^0 istnieje także granica $\lim f'(x) \neq 0$ i w zależności od jej znaku mamy $\lim f(x) = \pm\infty$ i odpowiednio $\lim(f(x)+f'(x)) = \pm\infty$, wbrew założeniu. W przypadku 2^0 możemy znaleźć liczby u i v oraz ciągi (x_n),(y_n) takie, że $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < \ldots$, $\lim x_n = \infty = \lim y_n$, $f(x_n) \le u < v \le f(y_n)$. Niech s_n będzie punktem, w którym f osiąga maksimum na przedziale $\langle x_n; x_{n+1}\rangle$, a t_n – punktem, w którym f osiąga minimum na przedziale $\langle y_n; y_{n+1}\rangle$. Wówczas $f'(s_n) = f'(t_n) = 0$, $f(s_n) \ge v$, $f(t_n) \le u$, co i tym razem prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $\lim(f(x)+f'(x)) = 0$.

[Inna metoda dowodu (mniej elementarna): zastosować regułę de l'Hospitala do pary funkcji $\varphi(x) = e^x f(x)$, $\psi(x) = e^x$.]



Rys. 1



Rys. 2

166. Przypuśćmy, że P leży w odległości wymiernej od pięciu wierzchołków K . Pięć wierzchołków sześcianu można wybrać na trzy sposoby (z dokładnością do izometrii), jak to pokazuje rysunek 1. We wszystkich przypadkach powtarza się konfiguracja czterech wierzchołków przedstawiona na rysunku 2. Można przyjąć, że wierzchołkami sześcianu K są punkty o współrzędnych zero-jedynkowych, a cztery wierzchołki z rysunku 2 – to punkty $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,1)$. Niech a, b, c, d będą odległościami punktu $P = (x,y,z)$ od tych czterech wierzchołków. Otrzymujemy układ równości

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \tag{1}$$

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 = b^2 \tag{2}$$

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = c^2 \tag{3}$$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = d^2 \tag{4}$$

gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernymi – a więc i całkowitymi (skoro ich kwadraty są całkowite).

Odejmując stronami (2) od (3) dostajemy $2(x-y) = (c-b)(c+b)$; zatem liczby $c \pm b$, a w konsekwencji także $x-y$, są parzyste. Parzysta jest więc i liczba x^2+y^2, równa na mocy (1) iloczynowi $(a-z)(a+z)$, a to znaczy, że liczby $a \pm z$ są parzyste, tak, że x^2+y^2 dzieli się przez 4. Stąd iloczyn $xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - (x^2+y^2))$ jest liczbą parzystą, więc x i y są parzyste.

Z (4) wynika, że $(d-(z-1))(d+(z-1)) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2.$

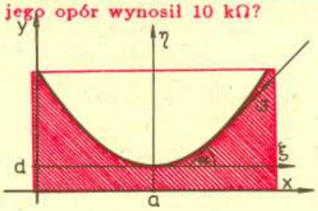
Lewa strona tej równości jest albo liczbą nieparzystą, albo liczbą podzielną przez 4. Natomiast prawa strona, wobec parzystości x i y, dzieli się przez 2, ale nie przez 4. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 2/1988

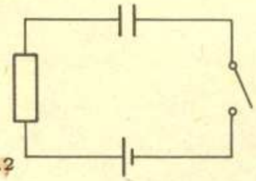
Przypominamy treść zadań:

63. Na poziomym stole spoczywa kielich o masie M. Jego wewnętrzna powierzchnia jest paraboloidą obrotową, której przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś paraboloidy jest (w układzie związanym z kielichem – rys.1) określony równaniem $\eta = k\xi^2 (-a \leq \xi \leq a)$. Na brzegu paraboloidalnej powierzchni umieszczono mały klocek o masie m i puszczono go. Określić charakter ruchu, jaki będzie wykonywany przez ten klocek przy zaniedbywalnym tarciu klocka o kielich oraz kielicha o stół i znaleźć równanie toru klocka (traktowanego punktowo) w układzie związanym ze stołem.

64. Zestawiono obwód jak na rysunku 2, złożony ze źródła napięcia o sile elektromotorycznej $\varepsilon = 18$ V i oporze wewnętrznym $r = 3\ \Omega$, kondensatora o pojemności $C = 40$ mF oraz opornika (o nominalnej mocy 0,5 W) o oporze $R = 10\ \Omega$, wiszącego na przewodach między baterią a kondensatorem.
O ile wzrośnie temperatura opornika po zamknięciu obwodu, jeśli jego masa wynosi $m = 0,7$ g, a ciepło właściwe, przy traktowaniu opornika jako ciała termicznie jednorodnego, $c = 0,7$ J/gK? Czy wzrost temperatury opornika byłby taki sam, mniejszy czy też większy, gdyby jego opór wynosił 10 kΩ?



Rys.1


Rys.2

63. Klocek będzie się ześlizgiwał po wewnętrznej powierzchni kielicha, nabywając energię kinetyczną, a następnie – kosztem tej energii – wślizgiwał się po przeciwległej stronie tej powierzchni w górę aż do zatrzymania, po którym nastąpi ponowne ześlizgiwanie się w dół. Ruch ten będzie miał charakter oscylacji niettłumionych ze względu na brak tarcia. Odpowiednie drgania będzie też wykonywał kielich przesuwając się po stole.

Wprowadźmy układ współrzędnych x, y związany ze stołem, jak na rysunku 1 (oś x leży w płaszczyźnie stołu, pionowa oś y przechodzi przez początkowe położenie klocka). Współrzędne klocka w obu układach są powiązane zależnościami $x = X + \xi$, $y = d + \eta$, gdzie X jest odciętą wierzchołka paraboloidy. Początkowe położenia klocka oraz kielicha określone są następująco:

(1) $\quad x_0 = 0, \qquad y_0 = ka^2 + d, \qquad X_0 = a.$

Oznaczając prędkość klocka w układzie kielicha przez $\mathbf{w} = [w_x, w_y]$ i w układzie stołu przez $\mathbf{v} = [v_x, v_y]$, a prędkość kielicha w układzie stołu przez $\mathbf{V} = [V, 0]$, mamy

(2) $\quad v_x = V + w_x, \qquad v_y = w_y.$

Współrzędne prędkości $\mathbf{w}$ możemy wyrazić przez funkcje kąta α nachylenia stycznej do paraboloidy:

(3) $\quad w_x = w\cos\alpha, \qquad w_y = w\sin\alpha,$

przy czym

(4) $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} = 2k\xi = 2k(x - X).$$

Z prawa zachowania pędu

(5) $$mv_x + MV = 0$$

wynika $V = -\mu v_x$, gdzie $\mu = m/M$. Stąd otrzymujemy

(6) $$X = a - \mu x.$$

Na podstawie równań (2), (3), (5) mamy

(7) $$v_x = \frac{w\cos\alpha}{1+\mu},$$

a z zależności (4) i (6)

(8) $$\mathrm{tg}\alpha = -2k\,(a - (1+\mu)x)\,.$$

Równanie toru klocka wyznaczamy z prostego równania różniczkowego:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{v_y}{v_x},$$

które po uwzględnieniu związków (3), (7) i (8) przyjmuje postać $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -2k\,(a - (1+\mu)x)\,(1+\mu)$. W wyniku całkowania tego równania z uwzględnieniem warunków początkowych (1) otrzymujemy dla $0 \leq x \leq 2a/(1+\mu)$ równanie toru

$$y = k\left((1+\mu)x - a\right)^2 + d.$$

Jak widać, tor klocka jest parabolą ściśniętą w stosunku do paraboli kielicha o czynnik $(1+\mu)$.

64. Po zamknięciu obwodu nastąpi ładowanie kondensatora do napięcia ε. Jeśli początkowo kondensator był nie naładowany, to w obwodzie przepłynie ładunek $Q = C\varepsilon$. Przyrost energii kondensatora wyniesie $\Delta E_c = Q\varepsilon/2 = C\varepsilon^2/2$. Energia źródła, z którego pobrano ładunek Q, zmaleje o $\Delta E_z = Q\varepsilon = C\varepsilon^2$. Różnica energii $\Delta E_z - \Delta E_c$ ulegnie wydzieleniu w postaci ciepła Joule'a na oporze R opornika oraz na oporze wewnętrznym r źródła w proporcji odpowiadającej stosunkowi tych oporów. Wobec tego na oporniku wydzieli się energia

$$E_R = \frac{1}{2}\frac{R}{R+r}C\varepsilon^2 = 5\ \mathrm{J}.$$

Cały ten proces zajdzie praktycznie w czasie kilku stałych czasowych tego obwodu $\tau = (R+r)C$, a więc w czasie rzędu sekundy. Wymiana ciepła między opornikiem a otoczeniem w tak krótkim czasie będzie na tyle mała, że można ją zaniedbać. Wobec tego cała energia E_R spowoduje przyrost temperatury opornika o ΔT, określony równaniem $E_R = cm\Delta T$. Stąd otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{RC\varepsilon^2}{2cm(R+r)} = 10\ \mathrm{K}.$$

Dla $R = 10$ kΩ stała czasowa wynosiłaby $\tau = 500$ s. Wymiana ciepła z otoczeniem w takiej sytuacji odgrywałaby już istotną rolę, zatem przyrost temperatury opornika byłby mniejszy (maksymalna moc wydzielana w tym przypadku w oporniku po zamknięciu obwodu wynosi zaledwie około 0,03 W).