Zadania

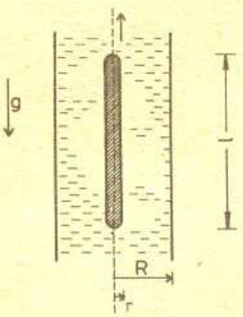
Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 505. Znaleźć prawdopodobieństwo wygrania gema w tenisie. Zakładamy, że szansa wygrania pojedynczej piłki wynosi p, niezależnie od dotychczasowego przebiegu gry. Gem jest wygrany, jeżeli gracz osiągnął przewagę przynajmniej dwóch piłek oraz jeżeli wygrał co najmniej cztery piłki.
Rozwiązanie na str. 6

M 506. Siedemnastokąt wypukły został rozbity przekątnymi na mniejsze wielokąty. Znaleźć maksymalną możliwą liczbę boków takiego wielokąta.
Rozwiązanie na str. 3

M 507. Udowodnić, że $y^p - x^p \leqslant (y-a)^p - (x-a)^p$, o ile $0 \leqslant a \leqslant x \leqslant y$, $0 \leqslant p \leqslant 1$.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI



F 244. W pionowej rurze wypełnionej cieczą wypływa długi pręt (rysunek). Zaniedbując tarcie obliczyć prędkość i przyspieszenie pręta w zależności od przebytej drogi.
Gęstość pręta ϱ_2 jest mniejsza od gęstości cieczy ϱ_1. Wielkości oznaczone na rysunku przyjąć za dane.
Rozwiązanie na str. 6

F 245. W rurze o zmiennym przekroju podtrzymywany jest stały w czasie przepływ nieściśliwej cieczy o gęstości ϱ. W wybranych przekrojach o powierzchni S_1 i S_2 prędkość cieczy nie zależy od odległości od ścianek rury. Wyznaczyć siłę, z jaką ciecz działa na odcinek rury między tymi przekrojami oraz ilość ciepła, jaka wydziela się w objętości między przekrojami w jednostce czasu. W pierwszym przekroju ciśnienie i prędkość wynoszą p_1 i v_1, a ciśnienie w drugim p_2.
Rozwiązanie na str. 7

Wzory kalendarzowe

Mgr Roman SZYMAŃSKI

Ogólnie rzecz biorąc wzory kalendarzowe spełniają to samo zadanie, co wieczne kalendarze, mianowicie służą do przeliczania dat między różnymi rachubami czasu. W praktyce nikt chyba nie przelicza dat z kalendarza juliańskiego na daty kalendarza gregoriańskiego, ponieważ w zasadzie kalendarze te istniały rozłącznie, natomiast najczęściej mamy do czynienia z następującymi zagadnieniami tego typu:
— znaleźć dzień tygodnia dla danej daty,
— znaleźć kolejny numer danego dnia w jakiejś rachubie,
— znaleźć datę Wielkanocy.

Algorytmów rozwiązywania tych zagadnień jest sporo. Można by, oczywiście, poprzestać na najprostszych, jednak warto — zwłaszcza licząc „na piechotę" — obliczyć to samo dwiema metodami, a to w celu wykrycia ewentualnych błędów rachunkowych.

Przyjmijmy następujące oznaczenia: r, m, d — odpowiednio rok, miesiąc i dzień, $\mathrm{E}(x)$ — część całkowita liczby x, $\mathrm{R}(x/y)$ — reszta z dzielenia x przez y.

Algorytm określający dzień tygodnia sprowadza się do obliczenia liczby dni D, które upłynęły od jakiejś daty początkowej do daty, o którą nam chodzi. Reszta z dzielenia D przez 7 wskazuje dzień tygodnia. Rok zwykły naszego kalendarza (gregoriańskiego) liczy 365 dni, a przestępny 366 dni, czyli odpowiednio 52 tygodnie i 1 dzień oraz 52 tygodnie i 2 dni. Można więc pominąć zliczanie pełnych tygodni i liczyć tylko liczbę wszystkich minionych lat i dodać liczbę lat przestępnych. Na koniec trzeba dodać liczbę dni d_r, które upłynęły od początku bieżącego roku do interesującej nas daty (wraz z naszą datą). Zatem

$$D = (r-1) + \mathrm{E}\left(\frac{r-1}{4}\right) - \mathrm{E}\left(\frac{r-1}{100}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{r-1}{400}\right) + d_r.$$

Znalezienie szybkiego sposobu obliczania kolejnego numeru dnia d_r w roku zostawiamy Czytelnikowi. Reszta z dzielenia D przez 7, czyli $\mathrm{R}(D/7)$, określa dzień tygodnia, przy czym 0 oznacza niedzielę, 1 poniedziałek itd.

Ten elementarny wzór bywa w rozmaity sposób modyfikowany. Z układu lat przestępnych w naszym kalendarzu wynika, że pierwszy dzień stulecia może przypadać tylko na jeden z czterech dni, mianowicie kolejno: poniedziałek, sobotę, czwartek i wtorek, i dalej cyklicznie w tej kolejności. Na tej podstawie J. P. Konogorski ułożył tabelki podające dla poszczególnych wieków liczbę P, a dla miesięcy liczbę K, dzięki którym rachunki przeprowadza się na liczbach najwyżej dwucyfrowych.

wiek		P
XVII	XXI	0
XVIII		5
XIX		3
XVI	XX	1

mies.	I	II	III	IV	V	VI
K	6(5)	2(1)	2	5	7	3
mies.	VII	VIII	IX	X	XI	XII
K	5	1	4	6	2	4

Liczby w nawiasach dotyczą lat przestępnych.

Teraz

$$D = r' + \mathrm{E}\left(\frac{r'}{4}\right) + P + K + d_m,$$

gdzie r' oznacza numer roku w stuleciu (czyli dwie ostatnie cyfry pełnego numeru roku), a d_m zwyczajny numer dnia w miesiącu.

Na uwagę zasługuje wzór, który w 1887 r. ogłosił Ch. Zeller. Włączył on do wzoru zarówno P, jak i K, i otrzymał

$$D = d_m + \mathrm{E}\left(\frac{26(m+1)}{10}\right) + r' + \mathrm{E}\left(\frac{r'}{4}\right) + \mathrm{E}\left(\frac{C}{4}\right) - 2C,$$

gdzie C oznacza ,,wiek-1", czyli dwie pierwsze cyfry pełnego numeru roku, styczeń i luty zaś należy liczyć jako 13 i 14 miesiąc poprzedniego roku. Reszta z dzielenia $D/7$ jest tu inaczej interpretowana, mianowicie: 0 oznacza sobotę, 1 niedzielę itd. (tzw. numeracja wyprzedzająca).

Bardziej skomplikowany jest inny algorytm ogłoszony w 1907 roku przez francuskiego astronoma G. Tarri'ego. Według niego

$$D = G + A + Q + M,$$

gdzie G jest stałą dla stulecia, braną z tabelki

stulecie		G
1600	2000	6
1700		4
1800		2
1500	1900	0

$$A = \mathrm{E}\left(\frac{r'}{12}\right) + \mathrm{R}(r'/12) + \mathrm{R}(\mathrm{R}(r'/12)/4),$$

$$M = 2m + 3 + \mathrm{E}\left(\frac{3(m+1)}{5}\right)$$

$$Q = \mathrm{R}(d_m/7).$$

Tu również styczeń i luty należy traktować jak 13 i 14 miesiąc poprzedniego roku i numeracja dni tygodnia jest wyprzedzająca.

W zagadnieniach historycznych może przydać się umiejętność określania dnia tygodnia w kalendarzu juliańskim, który kończy się na 4 X 1582. Stosuje się wtedy wzór

$$D = (r-1) + \mathrm{E}\left(\frac{r-1}{4}\right) + d_r + 5.$$

Numeracja dni tygodnia jest tu zwyczajna.

Obliczanie numeru dnia w rachubie juliańskiej (nie mylić z kalendarzem juliańskim!) pominiemy, ponieważ zostało to przedstawione w *Delcie* 9/1987. Algorytm na obliczanie daty Wielkanocy również był zamieszczony w *Delcie* 12/1984, aczkolwiek z błędami. Mianowicie: zamiast występującej tam liczby 26 powinno być $2b$, końcowy komentarz zaś powinien brzmieć: Jednak jeśli $d = 28$ oraz $a > 10$ i otrzymamy datę 25 kwietnia, to Wielkanoc wypada 18 kwietnia, jeśli natomiast otrzymamy datę 26 kwietnia, to Wielkanoc wypada 19 kwietnia.

Alternatywny sposób obliczenia daty Wielkanocy to obliczenie daty (gregoriańskiej) pierwszej wiosennej pełni Księżyca. Algorytm podał w 1965 r. Leonard Weber. Oto etapy obliczeń:

a) Oblicz resztę z dzielenia $r/19$.

b) Dodaj ją kolejno do 35, 45, 55. Jedna z sum będzie podzielna przez 3. Ta z liczb 35, 45, 55, która po dodaniu reszty dała wynik podzielny przez 3, przechodzi do następnego etapu.

c) Od tej liczby odejmij ową resztę. Wynik oznacza marcową datę pełni Księżyca.

Jeżeli zajdzie potrzeba, to odejmując 31 dostaniemy, oczywiście, datę kwietniową. Trzeba się jeszcze tylko upewnić, czy dostaliśmy rzeczywiście datę **pierwszej** pełni wiosennej. Jeżeli data wypadła wcześniejsza od 21 marca, to należy dodać 29 dni, jeżeli zaś późniejsza od 19 kwietnia, to znaczy, że jest to druga pełnia, a więc 29 dni należy odjąć (29 dni wynosi okres synodyczny Księżyca). Sprawdzamy, w jakim dniu wypada szukana pełnia i na koniec znajdujemy najbliższą niedzielę.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

OPÓR POJEDYNCZEGO ATOMU

Czy można zmierzyć opór elektryczny pojedynczego atomu ? Pytanie to brzmi dosyć absurdalnie zważywszy fakt, iż zarówno manipulowanie pojedynczym atomem, jak i pomiar jego oporu elektrycznego jest niezwykle trudne i graniczące wprost z fantazją. A jednak opisywany już w "Delcie" mikroskop tunelowy umożliwił dokonanie takich pomiarów. Przypomnijmy, że podstawowym elementem konstrukcji mikroskopu tunelowego jest bardzo ostra igła (nawet o czubku jednoatomowym) zbliżana na odległość kilku angstremów do badanej powierzchni. Pomiędzy czubkiem igły a powierzchnią przepływa prąd tunelowy, którego natężenie wykładniczo zmienia się z odległością. Przesuwając więc igłę w płaszczyźnie prostopadłej do powierzchni badanej próbki można otrzymać niezwykle dokładną "mapę" powierzchni próbki. Jeżeli z kolei igła znajdzie się zbyt blisko badanego obiektu, wówczas obserwowuje się wyrywanie atomów z czubka igły bądź ich zabieranie przez igłę z powierzchni. Technika mikroskopii tunelowej jest jednak wciąż udoskonalana. W ubiegłym roku wykonano nowe, dokładniejsze pomiary zależności prądu tunelowego od położenia igły i stwierdzono istnienie obszaru stałej wartości przepływającego prądu pomiędzy obszarem prądu tunelowego a obszarem przenoszenia atomów. W przypadku jednego z eksperymentów wykonanego dla powierzchni srebra badanej igłą irydową mierzono wartość prądu przy stałym napięciu około 20 mV. Natężenie prądu wzrastało od 1 nA do 570 nA przy zmniejszaniu odległości igła – próbka o trzy angstremy (co odpowiada zmianie oporu od 20 MΩ do 35 kΩ). Następnie zaś na obszarze dalszych dwóch angstremów natężenie przepływającego prądu (czyli wartość oporu układu) pozostawało nie zmienione. Wreszcie przy dalszym zmniejszaniu odległości gwałtowne (skokowe) zmiany prądu świadczyły o przemieszczeniach atomów. Przeprowadzone rachunki modelowe zakładające obecność jednego atomu sodu pomiędzy dwiema równoległymi elektrodami dały graniczną wartość oporu 32 kΩ przy odległości elektrod rzędu kilku angstremów. Dla atomu wapnia otrzymano z kolei 18 kΩ. Ogólnie obliczono wartość oporu elektrycznego R pojedynczego atomu jako:

$$R = A\,h / e^2,$$

gdzie h jest stałą Plancka, e – ładunkiem elementarnym, a A stałą rzędu jedności. Na przykład: eksperymentalnie znalezionej wartości R = 35 kΩ odpowiada stała A = 1,35. Zarówno wyniki doświadczalne, jak i teoretyczne pozwalają więc na stwierdzenie, że opór pojedynczego atomu jest mierzalny i wyraża się w dziesiątkach kiloomów.