Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VII 1988

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3\,S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Zadania z matematyki nr 171, 172

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

171. Przez punkt wewnętrzny P trójkąta ABC prowadzimy proste AP, BP, CP przecinające przeciwległe boki odpowiednio w punktach A', B', C'. Dowieść, że długość pewnego boku trójkąta ABC przekracza sumę odległości punktu P od punktów A', B', C'.

172. Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu (x_n) danego wzorem rekurencyjnym:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n^{1-\frac{1}{n}} - \frac{1}{n\mathrm{e}} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Zadanie **172** zaproponował pan Marek Gałecki z Milanówka.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 1/1988

Przypominamy treść zadań:

163. Do wnętrza kwadratu wpada przez punkt narożny promień świetlny, który następnie biegnie odbijając się od boków kwadratu. Gdy trafi w wierzchołek, opuszcza kwadrat. Dowieść, że promień nie wyjdzie przez punkt wejścia. Czy analogiczne stwierdzenie jest słuszne dla dowolnego równoległoboku? prostokąta? rombu?

164. Dowieść, że wszystkie liczby postaci $44^{44^{\cdot^{\cdot^{44}}}}$, gdzie liczba 44 występuje więcej niż 44 razy, mają taką samą końcówkę 44-cyfrową.

163. Przypuśćmy, wbrew tezie, że promień wchodzi i wychodzi przez ten sam wierzchołek O. Interpretujmy promień jako ruch punktu P ze stałą prędkością skalarną; przyjmijmy skalę czasu tak, by $t = 0$ i $t = 1$ były momentami wejścia i wyjścia, i oznaczmy położenie punktu w chwili t przez $P(t)$. Z zasady odbicia wynika, że droga punktu P składa się z odcinków biegnących w dwóch tylko kierunkach, przy czym z pary prostych przechodzących przez O i równoległych do tych dwóch kierunków tylko jedna przecina wnętrze kwadratu. Zatem końcowy fragment drogi punktu P leży na tej samej prostej, co fragment początkowy, czyli zachodzi równość $P(1-t) = P(t)$ dla małych $t > 0$. Zauważmy teraz, że odwracając bieg czasu dostajemy także dopuszczalną (tj. zgodną z zasadą: kąt padania = kąt odbicia) drogę promienia (punktu). Inaczej mówiąc, droga punktu Q mającego w chwili t położenie $Q(t) = P(1-t)$ jest drogą dopuszczalną. Każda taka droga jest w pełni wyznaczona przez swój dowolnie mały początkowy fragment. Zatem równość $P(t) = Q(t)$, słuszna dla małych t, musi być spełniona dla wszystkich $t \in \langle 0; 1\rangle$. Stąd $P(1/2-\Delta t) = P(1/2+\Delta t)$, co oznacza, że w chwili $t = 1/2$ następuje zwrot o 180°. A to nie jest możliwe.

Podane w zadaniu stwierdzenie jest prawdziwe dla dowolnego prostokąta (dowód dokładnie ten sam, co dla kwadratu), nie jest natomiast prawdziwe dla żadnego czworokąta $ABCD$, który nie jest prostokątem. Przyjmijmy bowiem, że AB jest bokiem o maksymalnej długości. Rzut przynajmniej jednego z wierzchołków C, D na prostą AB jest punktem wewnętrznym odcinka AB. Promień wypuszczony z tego wierzchołka prostopadle do boku AB wróci po jednokrotnym odbiciu do punktu startu.

164. Lemat 1. Jeśli $n, N \in \mathrm{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ oraz $4\cdot 5^{n-1}|N$, to $5^n|44^N-1$.

Dowód (indukcja względem n). Dla $n = 1$ teza jest prawdziwa, bo liczba 44 podniesiona do potęgi o wykładniku parzystym kończy się cyfrą 6. Załóżmy prawdziwość tezy lematu dla pewnego $n \in \mathrm{N}$ (i dla wszystkich $N \in \mathrm{N}$) i niech $N \in \mathrm{N}$ będzie dowolną liczbą podzielną przez $4\cdot 5^n$. Wówczas $N/5$ dzieli się przez $4\cdot 5^{n-1}$ i na mocy założenia indukcyjnego $44^{N/5}-1$ dzieli się przez 5^n. Zachodzi więc równość $44^{N/5} = 5^n q+1$, gdzie $q \in \mathrm{N}$. Wobec tego $44^N = (5^n q+1)^5 = 1+$(suma składników podzielnych przez 5^{n+1}), czyli $5^{n+1}|44^N-1$, co kończy dowód lematu.

Lemat 2. Niech $x_1 = 44$, $x_{n+1} = 44^{x_n}$ (dla $n \in \mathrm{N}$). Wówczas $5^n|x_{n+2}-x_{n+1}$ (dla $n \in \mathrm{N}\cup\{0\}$).

Dowód (indukcja). Dla $n = 0$ nie ma czego dowodzić. Ustalmy $n \in \mathrm{N}$ i założmy prawdziwość tezy dla $n-1$. Rozważmy różnicę $x_{n+2}-x_{n+1} = 44^{x_{n+1}}-44^{x_n} = 44^{x_n}(44^N-1)$, gdzie $N = x_{n+1}-x_n$. Z założenia indukcyjnego N dzieli się przez 5^{n-1}. Liczby x_n, x_{n+1} są też podzielne przez 4. Z Lematu 1 wynika, że $5^n|44^N-1$. Tym samym Lemat 2 jest udowodniony.

Rozważane w zadaniu liczby to wyrazy ciągu (x_n) o numerach > 44. Rzecz jasna, $x_{n-1} \geqslant n$. Zatem x_n $(= 44^{x_{n-1}})$ dzieli się przez 2^n. Stąd i z Lematu 2 wynika, że $10^n|x_{n+2}-x_{n+1}$ dla $n \in \mathrm{N}$, czyli, że dla dowolnie ustalonego $n \in \mathrm{N}$ wszystkie wyrazy o numerach większych od n mają jednakową końcówkę n-cyfrową. Wystarczy teraz przyjąć $n = 44$.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 159 /WT=1,36/ i 160 /WT=3,55/ z numeru 11/1987

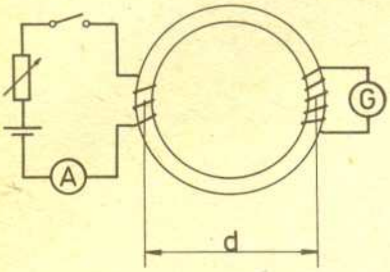
Konrad Pióro	-	Warszawa	47,31pkt
Tadeusz Józefczyk	-	Poznań	43,15pkt
Piotr Wach	-	Katowice	42,95pkt
Krzysztof Hryniewiecki	-	Białystok	39,93pkt
Adam Ruszel	-	Krosno	38,97pkt

Kolejnym członkiem Klubu 44 zostaje pan Konrad Pióro.

Zadania z fizyki nr 69, 70

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

Galwanometr balistyczny jest to galwanometr o dużym momencie bezwładności cewki, którego wskazania są proporcjonalne do ładunku przepływającego podczas chwilowego impulsu prądu.



69. Krótkowidz, noszący okulary o zdolności skupiającej −4 D, pokrył przednią — wypukłą powierzchnię swoich wypukłowklęsłych soczewek cienką warstwą metaliczną. Warstwa ta, poza działaniem przeciwsłonecznym, umożliwiła mu widzenie do tyłu (jak w bocznym lusterku samochodowym) równie ostre jak „przez okulary". Jakie są promienie krzywizny obu powierzchni soczewek? Współczynnik załamania szkła wynosi 1,53. Czy istnieje możliwość podobnego udoskonalenia okularów dalekowidza? Jeśli tak, to w jaki sposób?

70. Na pierścieniowy rdzeń z miękkiego ferromagnetyka nawinięto dwie cewki. Jedną z nich połączono z regulowanym źródłem prądu, a drugą z galwanometrem balistycznym (rys.). Podczas zamykania obwodu pierwszej cewki galwanometr wykazywał przepływ pewnego ładunku. Dla różnych (ustalonych) wartości natężenia prądu I uzyskano następujące wartości ładunku Q:

I (mA)	3	5	10	20	50	100	200	500
Q (μC)	10	30	130	450	700	860	920	1000

Wyznaczyć względną przenikalność magnetyczną materiału rdzenia w zależności od natężenia pola magnetycznego i przedyskutować otrzymane wyniki. Średnica pierścienia $d = 10$ cm, pole przekroju rdzenia $S = 1$ cm^2. Liczby zwojów: w pierwszej cewce $n_1 = 314$, w drugiej cewce $n_2 = 2400$. Całkowity opór obwodu drugiej cewki $R = 380\ \Omega$. Zakładamy, że badany rdzeń był ekranowany przed wpływem ziemskiego pola magnetycznego. Po każdym pomiarze dokonywano rozmagnesowania rdzenia w celu usunięcia pozostałości magnetycznej.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 1/1988

Przypominamy treść zadań:

61. Jaki powinien być stosunek średniej wartości indukcji magnetycznej B wewnątrz orbity o promieniu R, po której poruszają się elektrony, do wartości indukcji w odległości R od osi betatronu, aby orbita ta była orbitą stacjonarną? Zakładamy, że na początku cyklu elektrony mają zerową prędkość i pole magnetyczne jest równe zeru.

62. Jak zmieni się ciśnienie wewnątrz rury szybu naftowego wskutek wypływu gazu ze złoża? Zakładamy, że dolny i górny koniec rury zostały zamknięte, długość rury 2000 m.

61. Oznaczmy wartość indukcji pola magnetycznego w odległości R od osi betatronu — na okręgu orbity elektronów — przez B, natomiast średnią wartość indukcji magnetycznej wewnątrz orbity — przez B_s. Zakładamy, że stosunek B_s/B jest stały w czasie — wynika to z konstrukcji elektromagnesu zasilanego jedną parą cewek. Pęd elektronu po czasie t od włączenia pola — przy założeniu, że porusza się on po orbicie kołowej o promieniu R — wynosi $p(t) = \mathrm{e}\int_0^t E(t)\mathrm{d}t$, gdzie e — ładunek elementarny, natomiast $E(t) = \frac{1}{2\pi R}\frac{\mathrm{d}(\pi R^2 B_s)}{\mathrm{d}t} = \frac{R}{2}\frac{\mathrm{d}B_s}{\mathrm{d}t}$ jest natężeniem wirowego pola elektrycznego na okręgu orbity. Stąd wynika

$$p(t) = \frac{\mathrm{e}R}{2}B_s(t). \tag{1}$$

Aby siła Lorentza mogła, jako siła dośrodkowa, utrzymywać elektron na orbicie o promieniu R, musi zachodzić związek $\frac{p(t)v(t)}{R} = \frac{m(t)v^2(t)}{R} = \mathrm{e}v(t)B(t)$ ($m(t)$ i $v(t)$ oznaczają odpowiednio masę i prędkość elektronu w chwili t), z którego wynika

$$p(t) = \mathrm{e}RB(t). \tag{2}$$

Z przyrównania wyrażeń (1) i (2) otrzymujemy $B_s/B = 2$. Powyższe rozumowanie jest słuszne zarówno w mechanice klasycznej, jak i relatywistycznej. A więc elektrony o bardzo dużych energiach, których prędkość jest praktycznie równa prędkości światła, będą także utrzymywane na orbicie. Ograniczenie maksymalnych osiąganych energii (do około 100 MeV) wiąże się ze stratami energii elektronów, poruszających się po orbicie kołowej, na promieniowanie. (Literatura: Sz. Szczeniowski, *Fizyka doświadczalna*, cz. III, str. 324).

62. Niech wysokość rury wynosi H, gęstość wypełniającej ją cieczy (ropy naftowej) — ϱ, ciśnienie panujące w rurze na jej górnym końcu — p_0. Ciśnienie na dolnym końcu rury wynosi $p_0 + \varrho gH$ (g — przyspieszenie ziemskie); takie jest też ciśnienie gazu w bąblu, gdy zaczyna on wypływać ku górze. Przy założeniu, że ciecz jest nieściśliwa, a rura się nie odkształca, bąbel gazu nie może się rozprężać. Oznacza to, że ciśnienie w nim panujące jest stałe. Przybycie bąbla gazu do górnego krańca rury spowoduje zatem, że ciśnienie zwiększy się tam o ϱgH (do wartości $p_0 + \varrho gH$). O tyle samo wzrośnie też ciśnienie w całej rurze. Dla szybu o głębokości 2000 m, wypełnionego ropą naftową o gęstości 800 kg/m^3, ten wzrost ciśnienia wyniósłby około 16 MPa (160 atm), co mogłoby być niebezpieczne. Czynnikami, które zmniejszają wzrost ciśnienia, są, poza odkształcaniem się rury, ściśliwość cieczy oraz rozpuszczanie się w niej gazu. Redukcja wzrostu ciśnienia przez dwa ostatnie czynniki jest tym większa, im większy jest stosunek objętości cieczy do objętości gazu. W związku z występującym w skorupie ziemskiej gradientem temperatury można też oczekiwać obniżania się temperatury gazu w miarę jego wznoszenia i związanego z tym spadku ciśnienia. Nie jest to jednak efekt duży — odpowiednia różnica temperatur wynosi zaledwie kilkadziesiąt kelwinów.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 57 /WT=1,81/ i 58 /WT=3,34/
z numeru 11/1987

Dzierżysław Lipniacki	Lublin	40,03pkt
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	33,31pkt
Roman Musiał	Katowice	23,61pkt
Piotr Bała	Toruń	22,43pkt
Piotr Koczyński	Warszawa	21,39pkt
Wiesław Kacprzak	Kraków	20,39pkt