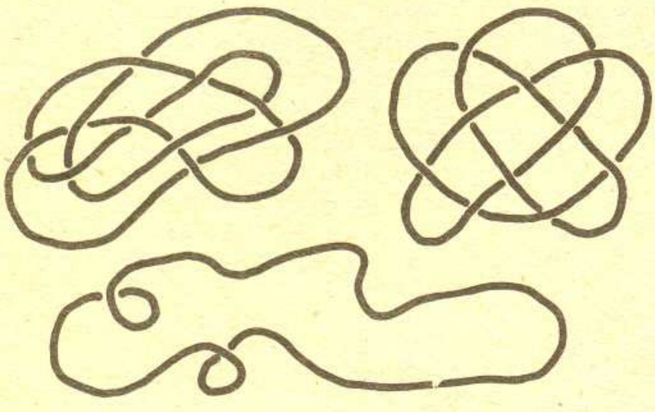
# Czy sferę można zawiązać?

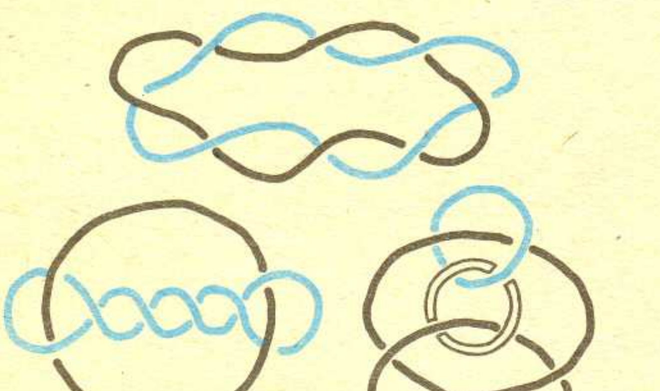
*Dr Krzysztof CIESIELSKI, dr Zdzisław POGODA*

Pytanie postawione w tytule brzmi abstrakcyjnie, żeby nie powiedzieć nonsensownie. Wiązanie kojarzy nam się raczej z tworami takimi, jak sznurki, tasiemki — z grubsza mówiąc, z wymiarem 1. Sfera natomiast — to dwuwymiarowa powierzchnia. Jak można myśleć o wiązaniu czegoś takiego?

W *Delcie* zamieszczono już kilka artykułów o węzłach. Przypomnijmy krótko, że węzłem nazywamy figurę topologicznie równoważną (homeomorficzną) z okręgiem. Mniej precyzyjnie — węzeł to okrąg, który może być „dziwnie" położony w przestrzeni.



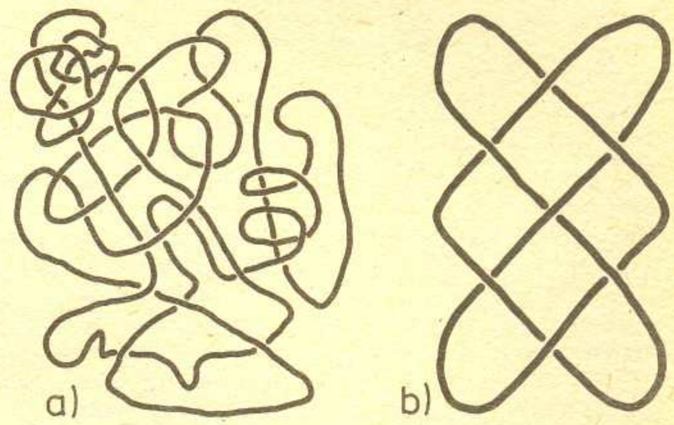
Jest tu pewna różnica w porównaniu z potocznym rozumieniem słowa „węzeł". W praktyce tworzymy je za pomocą linki czy sznurka. Rozważamy także sploty: przez splot rozumiemy rozłączną sumę skończonej liczby węzłów. Zauważmy w szczególności, że każdy węzeł jest splotem.



Czemu węzły mogą być interesujące, choć są one homeomorficzne z okręgiem? Dlatego, że na skutek „niestandardowego" umieszczenia w przestrzeni może się zdarzyć, iż nie da się ich bez rozerwania i sklejania doprowadzić do „normalnego" stanu okręgu. Matematycy lubią uogólniać definicje, twierdzenia... Prowadzi to czasem do zaskakująco interesujących rezultatów. Jeśli „dziwnie położony" mógł być okrąg — czyli sfera jednowymiarowa, to dlaczego nie zrobić tego ze zwykłą, dwuwymiarową? Można spróbować. Łatwo jednak wyczuć, że trójwymiarowa przestrzeń jest w tym celu za ciasna. Okręgu nie potrafimy zawiązać na płaszczyźnie — trzeba zwiększyć wymiar o jeden. Okazuje się, że jest tak i w naszym przypadku. Sferę dwuwymiarową można „zawiązać" w przestrzeni o wymiarze 4.

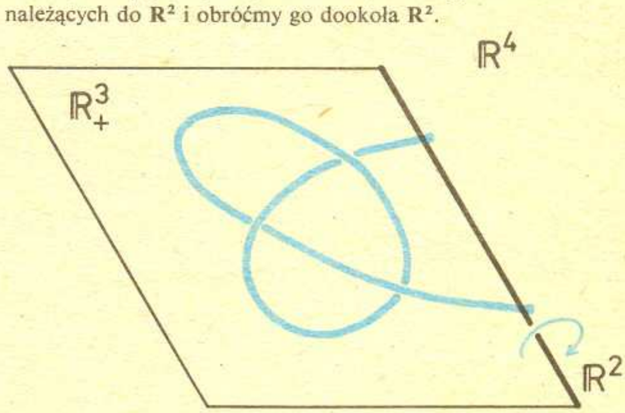
Spróbujmy wyrazić się bardziej precyzyjnie. Najpierw parę słów o innym pojęciu, nazwanym położeniem. Dwa zbiory $A$ i $B$ są jednakowo położone w $\mathbf{R}^n$, jeśli istnieje homeomorfizm $\mathbf{R}^n$ na siebie przeprowadzający $A$ na $B$. Metoda, za pomocą której często tłumaczy się intuicyjnie homeomorfizm, w praktyce opisuje właśnie jednakowe położenie: pozwalamy jeden ze zbiorów deformować „porządnie", czyli wyginać, rozciągać, ściskać — ale nie rozrywać lub kleić! — tak, by otrzymać zbiór drugi.

Zauważmy, że każde dwa jednakowo położone zbiory są homeomorficzne (wystarczy w definicji zacieśnić homeomorfizm z $\mathbf{R}^n$ do zbioru $A$), ale nie odwrotnie! Na przykład okrąg jest jednakowo położony w $\mathbf{R}^3$ z figurą (a) na poniższym rysunku, ale nie z węzłem (b).



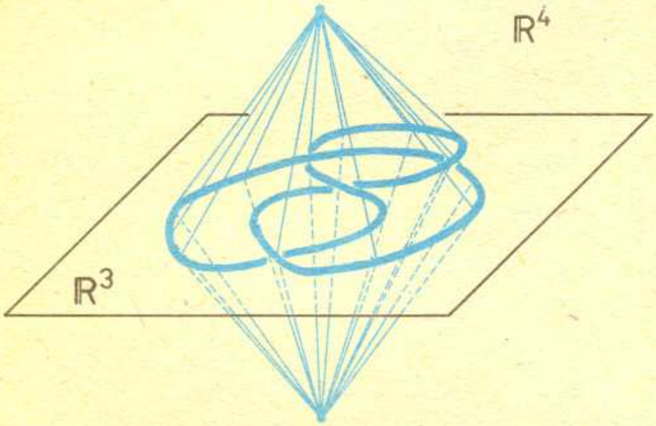

Będziemy mówić, że zbiór $A$ zawarty w $\mathbf{R}^4$ (homeomorficzny ze sferą $S^2$) jest sferą zawiązaną w sposób istotny (inaczej: sferą zawęźloną), jeśli nie jest on jednakowo położony z tzw. kanoniczną postacią $S^2$, czyli zbiorem $\{(x_1, x_2, x_3, 0) \in \mathbf{R}^4 : x_1^2+x_2^2+x_3^2 = 1\}$.

Jeżeli okrąg (zanurzony w $\mathbf{R}^3$) będziemy obracać wokół jednej z jego osi symetrii, to otrzymamy zwykłą sferę dwuwymiarową. Co może się stać, jeśli zamiast zwykłego okręgu będziemy kręcić okręgiem zawiązanym? Gdy zrobimy to w zwykłej przestrzeni, to powstaną tzw. „samoprzecięcia", trzeba więc dołożyć jeszcze jeden wymiar. Rozważmy płaszczyznę $\mathbf{R}^2$ opisaną jako $\{(x_1, x_2, 0, 0) : x_1, x_2 \in \mathbf{R}\}$ zawartą w $\mathbf{R}^4$, a przez $\mathbf{R}^3_+$ oznaczmy „półprzestrzeń z brzegiem $\mathbf{R}^2$", czyli $\{(x_1, x_1, x_3, 0) : x_3 > 0\}$. Punkty z tej półprzestrzeni możemy obracać wokół $\mathbf{R}^2$ (wydaje się to bardzo zaskakujące, ale jest w $\mathbf{R}^4$ możliwe). Jeżeli punkt o współrzędnych $(x_1, x_2, x_3, 0)$ obrócimy wokół $\mathbf{R}^2$ o kąt $\varphi$, to otrzymamy punkt o współrzędnych $(x_1, x_2, x_3 \cos\varphi, x_3 \sin\varphi)$. Weźmy w $\mathbf{R}^3_+$ „zawęźlony" odcinek (nie okrąg) o końcach należących do $\mathbf{R}^2$ i obróćmy go dookoła $\mathbf{R}^2$.



Krzywa zakreśli powierzchnię homeomorficzną ze sferą, ale będzie to sfera zawęźlona! Jej rzuty na jakąkolwiek trójwymiarową podprzestrzeń $\mathbf{R}^4$ będą miały punkty samoprzecięcia — tak, jak mają punkty samoprzecięcia rzuty na płaszczyznę zawartego w $\mathbf{R}^3$ węzła (istotnego, czyli nie położonego jednakowo z okręgiem).

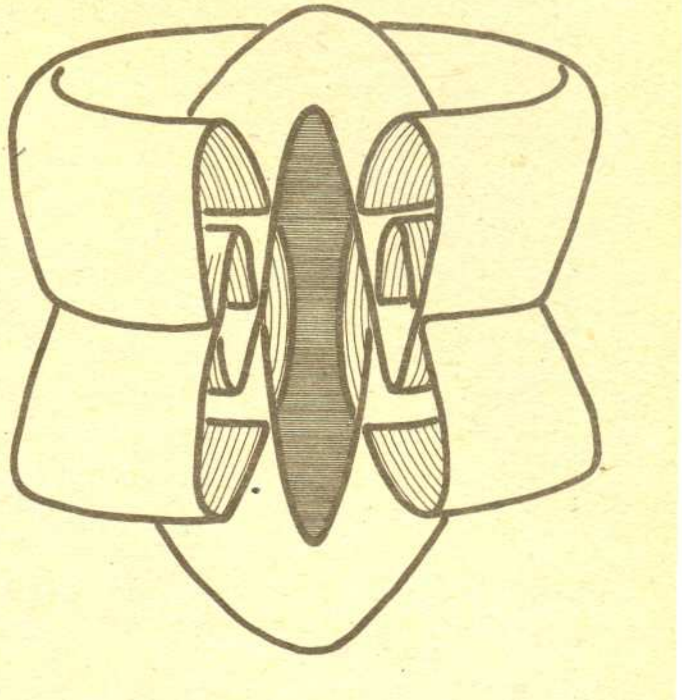
Zawęźlone sfery można utworzyć także na podstawie innej konstrukcji. Weźmy węzeł (istotny) położony w $\mathbf{R}^3$, traktując przestrzeń $\mathbf{R}^3$ jako $\mathbf{R}^3 \times \{0\}$, czyli podzbiór $\mathbf{R}^4$. Wybierzmy dwa punkty w $\mathbf{R}^4$ — jeden „nad przestrzenią", drugi „pod nią" (np. $(0, 0, 0, 1)$ i $(0, 0, 0, -1)$). Można to zrobić, gdyż $\mathbf{R}^3$ dzieli czterowymiarową przestrzeń na dwie części, tak samo, jak robi to płaszczyzna z przestrzenią trójwymiarową. Jeżeli teraz połączymy odcinkami punkty węzła z naszymi dwoma punktami, to otrzymamy sferę, ale inaczej położoną, niż ta zwykła.




Obie metody zostały po raz pierwszy przedstawione przez Emila Artina w roku 1925. Dzięki nim stwierdzono, że sferę można zawiązać na nieskończenie wiele (nierównoważnych) sposobów.

Nasuwa się w tym miejscu kolejne pytanie: czy wszystkie „zawiązane sfery" mogą powstać przy wykorzystaniu jednej z opisanych wyżej metod? Gdyby tak było, teoria węzłów dwuwymiarowych dałaby się sprowadzić do teorii zwykłych węzłów. Niestety — tak dobrze nie jest. Istnieje sporo takich położeń sfery w $\mathbf{R}^4$, których nie da się otrzymać za pomocą opisanych konstrukcji. Z tego powodu praca nad teorią węzłów dwuwymiarowych wymaga stosowania nieco innych metod niż w teorii węzłów jednowymiarowych. Jedna z nich polega na cięciu sfery (zanurzonej w $\mathbf{R}^4$) przestrzeniami trójwymiarowymi. W wyniku takiej operacji powstaje węzeł w $\mathbf{R}^3$, splot (z którego definicją już się zapoznaliśmy) lub układ punktów. Okazało się, że za pomocą metod algebraicznych można (choć nie jest to zadanie łatwe) z wyników cięć odtworzyć obraz całej sfery. Dużą rolę odgrywa tu dobrze znane topologom twierdzenie Seiferta — van Kampena. Przy okazji odkryto niezwykłe zjawisko: może się zdarzyć, że sfera nie jest zawęźlona w $\mathbf{R}^4$, ale mimo to jej cięcie może przedstawiać nietrywialny splot lub być węzłem zawiązanym w sposób istotny. (Splotem nietrywialnym lub istotnym nazywa się splot nie położony jednakowo z układem okręgów, których żadna para nie jest ze sobą „zapętlona" — inaczej mówiąc, łańcuch węzłów, nie rozpadający się na ogniwa bez ich rozrywania.) Odpowiedni przykład przedstawił John Stallings.

Wspomnieliśmy o splotach okręgów. Analogicznie można rozwijać teorię splotów dwu- i wyżej wymiarowych. Przy badaniu splotów sfer dwuwymiarowych także wykorzystuje się cięcia. I tu pojawiają się niespodzianki. Mianowicie: można pokazać dwie trójwymiarowe kule, zawarte w $\mathbf{R}^4$, rozłączne, lecz tak położone, że po przecięciu odpowiednią trójwymiarową przestrzenią ich brzegów (czyli sfer) otrzymamy istotny splot. Możliwa jest też sytuacja taka, że dwie sfery utworzą splot trywialny, ale nie można ich przedstawić jako brzegów dwóch kul rozłącznych. Takie sfery nazywają się nierozszczepialnymi. Rysunek przedstawia sposób otrzymania tej konfiguracji.



Sploty sfer wyżej wymiarowych mogą zachowywać się bardzo dziwnie w zależności od wymiaru przestrzeni, w której je rozważamy. Wiadomo, że okręgi nie dadzą się spleść w sposób istotny w przestrzeni cztero- i wyżej wymiarowej. Wydaje się to zrozumiałe — w takich przestrzeniach jest „więcej miejsca" niż w $\mathbf{R}^3$. Podobnych efektów należałoby się spodziewać także w przypadku sfer o wyższych wymiarach. Niemniej jednak rezultaty bywają czasami co najmniej zaskakujące. Przytoczmy jeden z przykładów: kiedy dwie 50-wymiarowe sfery tworzą splot? Odpowiedź jest następująca: w przestrzeni o 102 wymiarach (i wyżej) takie sfery zawsze można rozpleść. Gdy wymiar przestrzeni wynosi 101, 100, 99, 98, to sploty istotne są możliwe, ale jeśli jest on równy 97 lub 96 — nie! A dla wymiarów niższych od 96 (do 52, bo dalsze badania oczywiście nie mają sensu) sploty nietrywialne sfer pięćdziesięciowymiarowych można znowu konstruować.

Badanie tego typu zjawisk nie jest sprawą prostą. Silnych środków dostarcza topologia algebraiczna, dokładniej teoria homotopii. Konstruuje się mianowicie tzw. grupy homotopii zbiorów. Problemy zawiązywania i splatania sfer można rozstrzygnąć za pomocą ich grup homotopii. Jednak — choć brzmi to może zaskakująco, jako że grupy te (w ogólnym przypadku) zdefiniowane zostały bardzo dawno, a sfera jest — wydawałoby się — jednym z najwdzięczniejszych obiektów badań — do dziś niektóre grupy homotopii pewnych sfer nie są znane! Przy ich obliczaniu nie ma żadnej regularności, nie znaleziono żadnego algorytmu.

Istnieje ciekawy, mający wiele zastosowań aparat matematyczny, powstały dzięki próbom rozwiązania problemów teorii węzłów. Bywało też i odwrotnie. Metody, stworzone w innym celu, stosowano do „rozplątywania" węzłów wielowymiarowych — choć nie gordyjskich, ale niewykluczone, że bardziej skomplikowanych. Z różnym rezultatem. Wiele pytań do dziś czeka na odpowiedź. Rozstrzygnięcie otwartych zagadnień teorii przynieść może jeszcze niejedną niespodziankę.