Rozwiązanie zadania F 242. Niech przed i za spiralą ciśnienie i temperatura wynoszą odpowiednio P_1, T_1 i P_2, T_2. Zmiana energii wewnętrznej jednego mola powietrza jest równa $\Delta U = C_v(T_2-T_1)$, gdzie C_v jest ciepłem właściwym przy stałej objętości. Następujące po sobie porcje powietrza przepychające „nasz" mol gazu przy ciśnieniu P_1 wykonują nad nim pracę $A_1 = P_1V_1 = RT_1$, gdzie V_1 jest objętością jednego mola powietrza przed nagrzewającą spiralą; R — stała gazowa.

Analogicznie przy ciśnieniu P_2 gaz wykonuje pracę $A_2 = P_2V_2 = RT_2$, gdzie V_2 jest objętością jednego mola gazu za spiralą. Całkowita praca wykonana przez gaz wynosi:

$$A = A_2 - A_1 = R(T_2-T_1) = R\Delta T.$$

Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki ciepło dostarczone do gazu jest równe

$$Q = \Delta U + A = (C_v + R)\Delta T.$$

Stąd określimy moc spirali

$$M = (C_v+R)m_t\Delta T/\mu = C_p m_t \Delta T/\mu \approx \approx 10^3\ \mathrm{W},$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, iż ciepło molowe przy stałym ciśnieniu wynosi $C_p = C_v + R$ (m_t jest wydajnością przepływu, a μ średnią masą molową powietrza).

Ostrożnie z przybliżeniami

Nasz Czytelnik, pan Paweł Paszko, proponuje metodę przybliżonego obliczania wartości funkcji cosinus. Oznacza on przez h funkcję $h(t) = 2t^2-1$, natomiast przez h_n jej n-krotne złożenie. Wtedy $\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = h\left(\cos\frac{x}{2}\right) = h\left(h\left(\cos\frac{x}{4}\right)\right) = \ldots = h_n\left(\cos\frac{x}{2^n}\right)$. Korzystając teraz z przybliżonego wzoru

$$\cos y \approx 1 - \frac{y^2}{2!} \tag{1}$$

otrzymuje

$$\cos x \approx h_n\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right). \tag{2}$$

Wzór ten jest według naszego Czytelnika wygodniejszy do obliczeń niż wzór Taylora: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$ i np. dla $n = 5$, $x = \frac{\pi}{3}$ daje przy użyciu najprostszego kalkulatora 8-cyfrowego wynik $\cos\frac{\pi}{3} \approx 0{,}49996\ldots$ zamiast 0,5. Sprawdźmy, jakie przybliżenie powinien dawać wzór (2).

Funkcja h przekształca odcinek $[-1, 1]$ w siebie i $h'(x) = 4x$. Zatem dla dowolnych $s, t \in [-1, 1]$ mamy $|h(t)-h(s)| \leq 4|t-s|$ i

$$|h_n(t)-h_n(s)| \leq 4^n|t-s|. \tag{3}$$

Ze wzoru Taylora wynika, iż $\left|\cos y - \left(1-\frac{y^2}{2}\right)\right| < \frac{y^4}{24}$. A zatem na mocy (3)

$$\left|\cos x - h_n\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)\right| \leq 4^n\left|\cos\frac{x}{2^n} - \left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)\right| \leq 4^n\cdot\left(\frac{x}{2^n}\right)^4\cdot\frac{1}{24} = \frac{x^4}{4^n\cdot 24}. \tag{4}$$

Tak więc rzeczywiście wzór (2) daje przybliżenie funkcji cosinus. Zobaczmy jednak co stanie się, gdy spróbujemy obliczyć $\cos\frac{\pi}{3}$ dla $n = 7$. Otrzymujemy (też na 8-cyfrowym kalkulatorze) $\cos\frac{\pi}{3} \approx 0{,}5008\ldots$ Dokładność pogorszyła się i zupełnie nie zgadza się z dotychczasową teorią. Błąd nie powinien przekraczać $\left(\frac{\pi}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{4^7\cdot 24} \leq 0{,}000004$. Oto wyjaśnienie kłopotów.

Niech $0 < a < \frac{1}{4}$. Wtedy funkcja h przekształca przedział $[1-a, 1]$ w $[1-4a, 1]$ (bo $h(1-a) > 1-4a$) i $h_n\colon \left[1-\frac{1}{2\cdot 4^n}, 1\right] \to \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Jeśli $\frac{1}{2} \leq a < b \leq 1$, to $h(b)-h(a) > 2(b-a)$. Tak więc jeśli $a, b \in \left[1-\frac{1}{2\cdot 4^k}, 1\right]$, to

$$|h_{k+1}(a)-h_{k+1}(b)| \geq 2^{k+1}|b-a|.$$

Nierówność ta pokazuje, że mały błąd popełniony przy podstawieniu argumentu funkcji h_n może spowodować bardzo duży błąd wartości funkcji. Nie ma więc sensu stosować wzoru (2) dla zbyt dużych n. Jeśli używamy kalkulatora 8-cyfrowego, to podstawiając w (2) wartość $\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{2^n}\right)^2\right)$ popełniamy błąd nie większy niż $5\cdot 10^{-8}$. Oznaczmy przez b_n maksymalny błąd wartości funkcji h_n przy błędzie argumentu mniejszym niż $5\cdot 10^{-8}$. Z (3) mamy $b_n \leq 4^n\cdot 5\cdot 10^{-8}$. Jeśli rozpatrujemy $x \in [-2^k\cdot 10^{-2}\cdot\sqrt[4]{120}, 2^k\cdot 10^{-2}\cdot\sqrt[4]{120}]$, to stosując wzór przybliżony (2) popełniamy na mocy (4) błąd nie większy niż

$$\frac{(2^k\cdot 10^{-2}\cdot\sqrt[4]{120})^4}{4^k\cdot 24} = 4^k\cdot 5\cdot 10^{-8}$$

i nie warto stosować wzoru (2) dla $n > k$. Tak więc dla $2^k\cdot 0{,}0331 \leq |x| < 2^{k+1}\cdot 0{,}0331$ stosujemy wzór (2) dla $n = k$ i otrzymujemy wynik z dokładnością lepszą niż $4^k\cdot 10^{-7}$. Oczywiście może się zdarzyć, że otrzymana dokładność będzie dużo lepsza.

J. R.