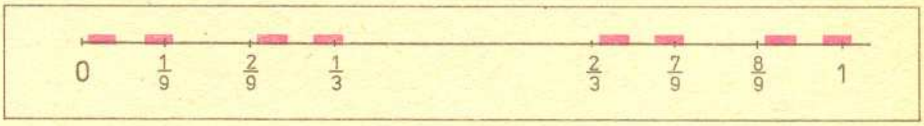
Manowce intuicji (II)

Prof. dr Stanisław HARTMAN

Zajmiemy się pewnym ciekawym zbiorem miary 0. Podzielmy odcinek [0, 1] na trzy równe części i wyrzućmy wnętrze części środkowej, to jest przedział otwarty $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Następnie podzielmy każdą z pozostałych części na trzy równe części i wyrzućmy wnętrza części środkowych, to jest przedziały otwarte $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ i $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. Powtarzajmy tę operację w nieskończoność (oczywiście w myśli). Co pozostanie? Zbioru, który pozostanie, nie można uwidocznić na rysunku, ale rysunek może pomóc naszej wyobraźni. Oto ,,trzecie przybliżenie" tego zbioru.



Pozostaną na pewno końce usuniętych przedziałów otwartych. Napisane w systemie trójkowym wyglądają one tak: 0; 0,1 $\left(=\frac{1}{3}\right)$; 0,2 $\left(=\frac{2}{3}\right)$; 1; 0,01 $\left(=\frac{1}{9}\right)$; 0,02 $\left(=\frac{2}{9}\right)$; 0,21 $\left(=\frac{7}{9}\right)$; 0,22 $\left(=\frac{8}{9}\right)$ itd. Zamiast 0,1 możemy także napisać 0,0222..., zamiast 0,01 możemy napisać 0,00222... i tak dalej, to znaczy możemy występującą na końcu jedynkę zastąpić przez zero i nieskończony ciąg dwójek, podobnie jak w systemie dziesiętnym można zamiast 0,1 $\left(=\frac{1}{10}\right)$ napisać 0,0999... A więc wszystkie liczby, które są końcami usuniętych przedziałów otwartych, możemy napisać w systemie trójkowym nie używając cyfry 1. W ich rozwinięciach występują od pewnego miejsca same zera (dla prawych końców) lub same dwójki (dla lewych końców). Istnieje więc w [0, 1] nieskończenie wiele innych liczb, które można w tym układzie napisać bez cyfry 1, ponieważ każdy ciąg zer i dwójek wyraża taką liczbę. Te właśnie ,,bezjedynkowe" liczby pozostaną po wyrzuceniu wszystkich ,,środkowych" przedziałów, bo te środkowe to takie, których punkty mają w rozwinięciu trójkowym na którymś miejscu jedynkę, na przykład: wyrzucone liczby między $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ to te, w których rozwinięciu trójkowym występuje 1 na pierwszym miejscu za przecinkiem, wyrzucone liczby między $\frac{1}{9}$ a $\frac{2}{9}$ i między $\frac{7}{9}$ a $\frac{8}{9}$ to liczby, w których występują na początku cyfry 01 lub odpowiednio 21 i tak dalej. A zatem możemy scharakteryzować zbiór, który pozostanie po wszystkich ,,wyrzucaniach", jako zbiór liczb w odcinku [0, 1], które można w układzie trójkowym napisać bez cyfry 1. Nazywa się on zbiorem Cantora od nazwiska odkrywcy. Oznaczmy go przez C. Widać, że jest to bardzo ,,dziurawy" zbiór: w każdym odcinku leżącym w [0, 1] istnieje odcinek wolny od punktów C.

Wykażemy, że zbiór C jest zbiorem miary 0. To bardzo proste. Wybierzmy dowolną liczbę $\varepsilon > 0$ i zacznijmy usuwać ,,środkowe" przedziały tak, jak to czyniliśmy przy konstrukcji zbioru Cantora. Pierwszy krok polega na wyrzuceniu jednego przedziału długości $\frac{1}{3}$ $\left(\text{mianowicie przedziału } \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right)$. Drugi krok to wyrzucenie 2 przedziałów długości $\frac{1}{9}$, n-ty krok to wyrzucenie 2^{n-1} przedziałów długości $\frac{1}{3^n}$. W ciągu całej konstrukcji usuwamy w ten sposób przedziały, których długości mają sumę $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$. A więc dla pewnego n_0 będzie $\sum_{n=1}^{n_0} \frac{2^{n-1}}{3^n} > 1-\varepsilon$. Po n_0 krokach zostaje w [0, 1] zbiór złożony z odcinków leżących między tymi, których wnętrza usunęliśmy, a suma długości tych pozostałych jest mniejsza od ε. Ale przecież pokrywają one łącznie cały zbiór C. Zatem zbiór Cantora istotnie może być pokryty ciągiem (nawet skończonym) odcinków o dowolnie małej sumie długości. To kończy dowód.

Nic tu nie przeczy intuicji. Najwyżej sam zbiór Cantora może się wydać niezwykły. Ale że taki rozrzedzony, dziurawy zbiór jest miary 0, to nas nie dziwi. Może jednak ktoś potrafi trochę zmienić konstrukcję zbioru Cantora tak, żeby pozostał zbiór nie będący miary 0, ale tak samo dziurawy, to jest taki, że każdy odcinek zawiera odcinek rozłączny z tym zbiorem.

Postawimy teraz następujące pytanie:

(P) Czy zbiór Cantora można pokryć ciągiem odcinków o dowolnie zadanych długościach (tak jak to jest dla zbiorów przeliczalnych)?

Odpowiedź brzmi: nie. Zatem istnieją zbiory miary 0 bez takiej właściwości. Oczywiście, muszą to być zbiory nieprzeliczalne, a więc zbiór Cantora jest przykładem nieprzeliczalnego zbioru miary 0. O istnienie takich zbiorów pytaliśmy na końcu części I tego artykułu. Teraz naszym zadaniem jest uzasadnić odpowiedź „nie" na pytanie (P). W tym celu udowodnimy, że istnieje funkcja ciągła w przedziale [0, 1] słabo rosnąca, tj. taka, że jeśli $x_2 > x_1$, to $f(x_2) \geqslant f(x_1)$, przyjmująca wartość stałą w każdym przedziale stycznym do zbioru Cantora (tak będziemy nazywać przedziały, które wyrzuciliśmy przy konstrukcji tego zbioru, bo to krócej i uprzejmiej), wartość 0 dla $x = 0$ i wartość 1 dla $x = 1$. Istnieniu takiej funkcji chciałoby się zaprzeczyć. Bo jakże to? Przedziały styczne mają w sumie długość 1, tak jak cały odcinek [0, 1]; w tych przedziałach naszej funkcji nie wolno rosnąć, bo ma mieć stałą wartość w każdym z nich, nie wolno jej w żadnym punkcie skoczyć w górę (na wzór funkcji część całkowita), bo jest ciągła, a jednak ma wzrosnąć od 0 do 1. Postaramy się zadać kłam intuicji — zbudujemy taką funkcję.

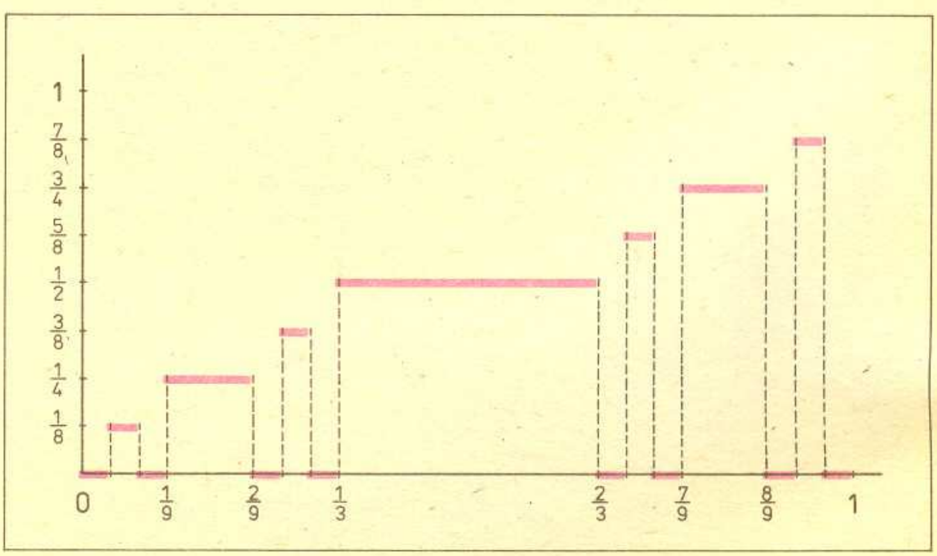
Zapiszmy każde x ze zbioru C w systemie trójkowym nie używając jedynki (tak można!). Otrzymamy ciągi zer i dwójek (za przecinkiem). Napiszmy teraz zamiast każdej dwójki właśnie jedynkę, dotychczas zabronioną. Każdy tak otrzymany ciąg zer i jedynek odczytajmy jako pewną liczbę napisaną w systemie dwójkowym. Tę liczbę przyjmiemy za wartość funkcji f w punkcie x. Na przykład dla $x = \frac{1}{3} = 0{,}0222\ldots$ mamy $f(x) = 0{,}0111\ldots = \frac{1}{2}$.

Określiliśmy w ten sposób funkcję f w punktach zbioru C. Pozostaje określić ją w przedziałach stycznych do C. Otóż na obu końcach każdego takiego przedziału (a one należą do C) f ma tę samą wartość. Istotnie: lewy koniec ma zawsze w rozwinięciu trójkowym od pewnego miejsca same dwójki, a przed nimi zero. Prawy koniec tegoż przedziału ma zamiast tego zera dwójkę, a zamiast tych dwójek zera, np. $\frac{7}{9} = 0{,}20222\ldots$, $\frac{8}{9} = 0{,}22000\ldots$ Mamy więc

$f\left(\frac{7}{9}\right) = 0{,}10111\ldots = \frac{3}{4}$ (odczytujemy tę liczbę w systemie dwójkowym)

i $f\left(\frac{8}{9}\right) = 0{,}11000\ldots = \frac{3}{4} = f\left(\frac{7}{9}\right)$.

Dokładnie tak samo „wychodzi" równość funkcji f na końcach dowolnego przedziału stycznego do C. Teraz uzupełniamy definicję funkcji f nadając jej w każdym punkcie dowolnego przedziału stycznego do C taką wartość, jaką przyjmuje na końcach tego przedziału. Oto przebieg funkcji f w przedziałach stycznych długości $\geqslant \frac{1}{27}$:



Oczywiście, mamy $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$. Funkcja f jest słabo rosnąca. Istotnie: w przedziałach stycznych pozostaje stała, a dla dwóch punktów $x_1, x_2 \in C$, $x_1 < x_2$, jeśli n jest pierwszym miejscem, na którym w rozwinięciu trójkowym x_1 i x_2 różnią się, to n-tą cyfrą liczby x_1 jest 0, a n-tą cyfrą x_2 jest 2. Wtedy liczby $f(x_1)$ i $f(x_2)$ różnią się w rozwinięciach dwójkowych także dopiero na n-tym miejscu i n-tą cyfrą liczby $f(x_1)$ będzie 0, a n-tą cyfrą liczby $f(x_2)$ będzie 1, zatem $f(x_2) > f(x_1)$.

Pozostaje wykazać ciągłość funkcji f. Aby wykazać ciągłość funkcji monotonicznej, wystarczy dla każdego punktu x_0 znaleźć choćby jeden ciąg (x_n^1) dążący do x_0 z lewej strony i jeden ciąg (x_n^2) dążący do x_0 z prawej strony tak, by było $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^1) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n^2) = f(x_0)$. Jeżeli x_0 leży poza C, a więc w jakimś przedziale stycznym, to nasza funkcja f ma w otoczeniu x_0 stałą wartość, więc jest w x_0 ciągła. Jeżeli x_0 należy do C, to x_0 przedstawia się w rozwinięciu trójkowym za pomocą zer i dwójek. Jeśli nadto x_0 nie jest prawym końcem przedziału stycznego, to dwójek jest w tym rozwinięciu nieskończenie wiele. Jeśli którąś z nich zamienimy na zero, dostaniemy liczbę mniejszą. Jeżeli tę dwójkę do zamiany będziemy wybierali coraz dalej, to otrzymamy ciąg punktów zbioru C zbieżny z lewej strony do x_0. Wartości funkcji f w tych punktach będą się w swym rozwinięciu dwójkowym różniły od $f(x_0)$ tym, że na jednym miejscu, coraz dalszym, zamiast 1 wystąpi 0, a więc ich ciąg będzie dążył do $f(x_0)$. Znaczy to, że funkcja f jest ciągła w x_0 z lewej strony. Jeśli x_0 jest prawym końcem przedziału stycznego, to w pewnym otoczeniu x_0 z lewej strony wartość funkcji f jest taka jak w x_0, a więc i wtedy mamy ciągłość w x_0 z lewej strony. Prawostronnej ciągłości funkcji f dowodzi się analogicznie (trzeba najpierw założyć, że x_0 nie jest lewym końcem przedziału stycznego i zamieniać coraz dalsze zera na dwójki).

Zbudowaliśmy w ten sposób funkcję spełniającą wszystkie żądane warunki. Wymyślił ją na początku naszego stulecia wielki matematyk francuski Henri Lebesgue (wymawia się to mniej więcej Lebeg z akcentem na drugim e i z dźwięcznym g na końcu). Odegrała ona dużą rolę w nauce o funkcjach i znana jest pod nazwą funkcji schodkowej Lebesgue'a. A teraz, korzystając z niej, dowiedziemy, że zbioru Cantora nie można pokryć ciągiem przedziałów o dowolnie zadanych długościach. Otóż funkcja f, jak każda funkcja ciągła na odcinku, ma taką własność, że dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje takie $\delta > 0$, że jeśli $|x_2 - x_1| < \delta$, to $|f(x_2) - f(x_1)| < \varepsilon$. Niech ε będzie równe najpierw $\frac{1}{4}$, a odpowiednie δ oznaczmy przez δ_1.

Potem wybieramy $\varepsilon = \frac{1}{8}$, a odpowiednie δ niech się nazywa δ_2. I tak dalej, to znaczy za n-tym razem przyjmujemy $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$, a odpowiednie δ oznaczamy przez δ_n. Przypuśćmy, że zbiór C można pokryć odcinkami długości $\delta_1, \delta_2, \ldots$ Na przedziale długości δ_n funkcja wzrasta najwyżej o $\frac{1}{2^{n+1}}$, a więc suma tych przyrostów nie przekracza $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$. Jednak, skoro te przedziały pokrywają cały zbiór C, to ta suma wynosi co najmniej 1, gdyż o tyle funkcja f wzrasta między punktem $x = 0$ a punktem $x = 1$, a w przedziałach stycznych do C nie wzrasta wcale — w każdym z nich jest stała. Ta sprzeczność dowodzi, że przedziałami długości δ_n nie można pokryć zbioru Cantora.

Z istnienia funkcji schodkowej Lebesgue'a wynika jeszcze jeden ciekawy wniosek oprócz tych, które wyciągnęliśmy z góry, mianowicie: zbiór Cantora jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych w $[0, 1]$. Istotnie, funkcja f przyporządkowuje (trudno się obejść bez tego niezgrabnego słowa) każdemu punktowi zbioru C liczbę rzeczywistą w $[0, 1]$ tak, że wszystkie te liczby zostają w ten sposób wyczerpane (bo otrzymujemy wszystkie rozwinięcia dwójkowe). Wynika stąd, że liczb w $[0, 1]$ jest co najwyżej tyle, ile punktów zbioru Cantora, a oczywiście nie jest ich mniej. Zobaczyliśmy więc, że z dwóch zbiorów nieprzeliczalnych równolicznych jeden może wyglądać na dużo większy od drugiego: cały odcinek jest równoliczny z „dziurawym" zbiorem C. Dla zbiorów przeliczalnych mieliśmy już wcześniej podobny przykład: gęsty zbiór liczb wymiernych i rzadki zbiór liczb naturalnych są równoliczne. Widać stąd, że liczność (mówi się czasem „moc") nieskończonego zbioru punktów nie mówi jeszcze wszystkiego o jego wielkości, gdyż można ją określać za pomocą innych jeszcze cech. W szczególności wyróżniliśmy pewien rodzaj zbiorów małych — to te, które można pokryć ciągiem odcinków o dowolnie małej sumie długości, czyli zbiory miary 0. Pokazaliśmy, że to nie to samo, co dać się pokryć ciągiem odcinków o dowolnych długościach — ta cecha przysługuje, jak wiemy, zbiorom przeliczalnym. Ale, dodajmy, istnieją także zbiory nieprzeliczalne dające się pokryć ciągiem odcinków o dowolnie zadanych długościach.

Najwyższy czas kończyć tę pogadankę, naładowaną pojęciami i tematycznie niejednorodną. Kto doczytał do końca, niech ochłonie na świeżym powietrzu.

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

JAK CZŁOWIEK MOŻE ZOBACZYĆ JEDEN FOTON ?

Widzenie jest niezwykle fascynującym, bardzo złożonym zjawiskiem, którego wyjaśnienie wymaga zrozumienia całego szeregu procesów fizycznych, chemicznych, biologicznych i psychologicznych. Siatkówka ludzkiego oka zawiera bowiem dwa rodzaje detektorów światła. W ciągu dnia używamy około dwóch milionów mniej czułych czopków, które umożliwiają nam rozróżnianie barw, W ciemnościach wykorzystujemy z kolei około stu milionów bardzo czułych pręcików. Poszukiwania progu czułości pręcików wykonywane przez różnych badaczy doprowadziły do zdumiewającego wniosku. Stwierdzono bowiem, że w odpowiednich warunkach (długotrwałe przyzwyczajenie do ciemności) możliwe jest zaobserwowanie przez człowieka sygnału świetlnego kilku fotonów. Zjawisko to znane od kilkudziesięciu lat, nie było w pełni zrozumiałe. W ostatnich latach, bardzo interesujące eksperymenty przeprowadzone w USA, ZSRR i Japonii na komórkach ocznych pozwoliły na zrozumienie fizycznych i chemicznych podstaw łańcucha zjawisk rozpoczynającego się absorpcją jednego fotonu przez pręcik. Okazało się, że w "gotowym do działania" pręciku występuje tzw. ciemny prąd wywołany przepływem jonów sodu i potasu. Absorpcja jednego fotonu przez jedną ze stu milionów cząsteczek rodopsyny (purpury wzrokowej) znajdujących się w pręciku powoduje gwałtowną redukcję tego ciemnego prądu przez zablokowanie przepływu milionów atomów sodu przez membranę znajdującą się w komórce. Ten bardzo złożony proces chemiczny, polegający na rozpadzie setek molekuł, nazywany jest "chemicznym fotopowielaniem". Z fizycznego punktu widzenia istotny jest fakt, że słaby sygnał (foton) jest w stanie zamknąć o wiele silniejszy przepływ (prąd jonów Na^+) i w konsekwencji doprowadzić do przekazania, poprzez układ nerwów, pewnego sygnału prądowego do mózgu. Natężenie tego prądu zostało zmierzone. W przypadku pręcika absorpcja jednego fotonu prowadzi do sygnału rzędu jednego pikoampera (1 pA = 10^{-12} A) trwającego około 0,3 sekundy. Jak łatwo obliczyć, oznacza to przepływ ładunku około $3 \cdot 10^{-13}$ kulomba, czyli około dwóch milionów ładunków elementarnych. W czopkach odpowiedni sygnał prądowy jest o dwa rzędy wielkości słabszy. Dla jednego fotonu szacuje się go na około dziesięć femtoamperów (1 fA = 10^{-15} A), a na dodatek jest on czterokrotnie krótszy. Oznacza to przepływ ładunku wynoszącego "tylko" około pięciu tysięcy ładunków elementarnych. Liczby te wyjaśniają doskonale różnicę w poziomie czułości (jak i szybkości reakcji) czopków i pręcików. Przy wolniejszej reakcji czopków człowiek nie byłby w stanie obserwować szybko poruszających się przedmiotów. Z kolei proces "zliczania fotonów" w pręcikach jest znacznie bardziej wydajny, ale za to kilkakrotnie wolniejszy. Przed badaczami mechanizmu widzenia stoi jeszcze wiele pytań. Bardzo interesujący jest na przykład problem separacji przez mózg słabych pikoamperowych sygnałów z zawsze obecnego szumu. Wspomniane powyżej pomiary są jednak istotnym krokiem na drodze ku poznaniu tajemnic wzroku.