Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 1988

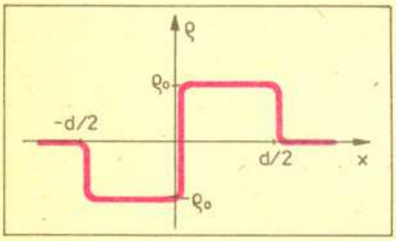
Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3\,S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Zadania z fizyki nr 67, 68

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



67. W najprostszym półprzewodnikowym złączu p—n istnieje przestrzenny rozkład ładunku, w przybliżeniu taki, jak na rysunku; x jest tu odległością od „środkowej płaszczyzny" złącza, d — grubością obszaru złącza, ϱ — gęstością ładunku. Przyjmując, że stała dielektryczna półprzewodnika wynosi ε, przedstawić zależność natężenia pola elektrycznego od współrzędnej x.

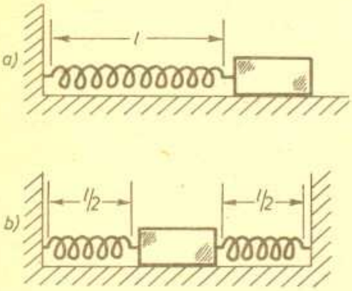
68. Wyznaczyć stosunek średnich gęstości Słońca i Ziemi, korzystając wyłącznie z poniższych danych:
promień Ziemi — $6{,}4 \cdot 10^6$ m,
przyspieszenie ziemskie — $9{,}8\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$,
średnica kątowa Słońca oglądanego z Ziemi — $9{,}3 \cdot 10^{-3}$ rad,
1 rok $\approx 3{,}2 \cdot 10^7$ s.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 12/1987

Przypominamy treść zadań:

59. Rysunek przedstawia dwa układy drgające (a) i (b) z klockiem poruszającym się pod wpływem działania sprężyny (sprężyn) po poziomej prostej. W układzie (b) zastosowano sprężynę z układu (a) — o długości swobodnej l, rozciętą na dwie jednakowe części o długości swobodnej $l/2$. Obliczyć stosunek częstotliwości drgań swobodnych tych układów przy założeniu, że masy klocków są jednakowe. Masę sprężyn oraz tarcie klocków o podłoże należy zaniedbać. Czy wynik zmieni się i jak, jeśli sprężyna zostanie rozcięta na dwie niejednakowe części?

60. Rozpatrzmy nieskończony solenoid mający n zwojów na jednostkę długości, przez który płynie prąd o natężeniu I; niech wewnętrzna średnica solenoidu będzie równa D. We wnętrzu solenoidu znajduje się rdzeń o przenikalności magnetycznej μ w postaci nieskończonego walca o średnicy d. Znaleźć natężenie pola magnetycznego wewnątrz rdzenia oraz w obszarze wewnątrz solenoidu, poza rdzeniem. Porównać tę ostatnią wielkość z natężeniem pola magnetycznego wewnątrz solenoidu bez rdzenia. Przeprowadzić jakościowe porównanie dla przypadku skończonej długości solenoidów i rdzenia.



59. Oznaczmy przez k współczynnik sprężystości sprężyny o długości l (równy wartości bezwzględnej stosunku siły sprężystości przy pewnym wydłużeniu sprężyny do tego wydłużenia). Część tej sprężyny, o długości l', będzie miała współczynnik sprężystości kl/l'.

Okres drgań swobodnych układu (a) określa wzór $T_a = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, ich częstotliwość jest więc $\nu_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$.

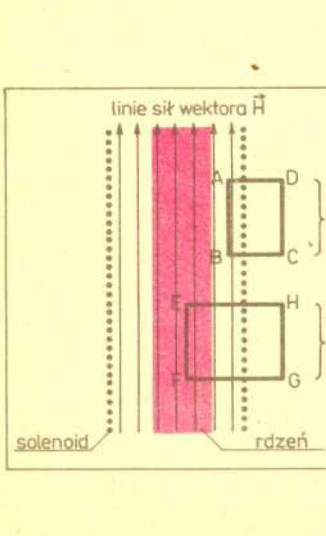
W układzie (b) każda ze sprężyn ma współczynnik sprężystości $2k$. Wypadkowa stała sprężystości układu sprężyn jest równa sumie stałych sprężystości obu sprężyn, wynosi więc $4k$.

Częstotliwość drgań swobodnych tego układu jest równa $\nu_b = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4k}{m}}$.

W rezultacie $\frac{\nu_b}{\nu_a} = 2$.

W przypadku rozcięcia sprężyny na niejednakowe części l_1 i l_2 ich współczynniki sprężystości będą $k_1 = kl/l_1$ oraz $k_2 = kl/l_2$. Stosunek częstotliwości wyniesie $\frac{\nu_b}{\nu_a} = \frac{l}{\sqrt{l_1 l_2}}$.

Łatwo sprawdzić, że jest on najmniejszy dla $l_1 = l_2$.



60. Z nieskończonego solenoidu linie sił pola magnetycznego nie wychodzą na zewnątrz. Jako model takiego solenoidu możemy przyjąć solenoid w kształcie torusa o średnicy znacznie większej od średnicy solenoidu. Fragment toroidalnego solenoidu może być dowolnie zbliżony do walca, dotyczy to również rdzenia (oś rdzenia powinna być równoległa do osi solenoidu). Rozpatrzmy dwa kontury zaznaczone na rysunku. Składowa wektora natężenia pola magnetycznego H wzdłuż konturu jest różna od zera tylko na odcinkach równoległych do osi solenoidu znajdujących się w jego wnętrzu (AB i EF). Oznaczając wartość natężenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu przez H mamy na podstawie prawa Ampère'a $Hl = nIl$ niezależnie od tego, czy kontur przechodzi przez rdzeń czy też nie. Wynika stąd natężenie pola $H = nI$, takie samo wewnątrz rdzenia, jak i poza nim. Gdyby rdzenia nie było, natężenie pola magnetycznego wewnątrz solenoidu byłoby takie samo.
W przypadku solenoidów o skończonej długości linie sił pola magnetycznego wychodzą na zewnątrz. Powoduje to zmniejszenie natężenia pola magnetycznego wewnątrz solenoidu w porównaniu z nieskończonym solenoidem (wystarczy przeanalizować opisane wyżej kontury, uwzględniając nieznikające pole magnetyczne na zewnątrz solenoidu).

Zadania z matematyki nr 169, 170

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

169. Dany jest wielościan wypukły. W każdym wierzchołku schodzą się co najmniej 4 krawędzie. Dowieść, że co najmniej 8 ścian to trójkąty.

170. a) Niech Z będzie takim podzbiorem płaszczyzny, że
(1) nie istnieje prosta zawierająca zbiór Z,
(2) odległość między każdymi dwoma punktami zbioru Z jest liczbą naturalną.
Udowodnić, że Z jest zbiorem skończonym.
b) Dla dowolnie zadanej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ podać przykład n-punktowego podzbioru płaszczyzny o własnościach (1) i (2).

Zadanie **170** zaproponował pan Marcin Mazur z Białegostoku.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 12/1987

Przypominamy treść zadań:

161. Zaproponować określenie jednego działania (dwuargumentowego) w zbiorze liczb rzeczywistych, za pomocą którego można (z użyciem liczb 0 i 1) wyrazić cztery działania arytmetyczne.
162. Wyznaczyć wszystkie pary m, n liczb całkowitych nieujemnych takie, że liczby $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ oraz $\sqrt{n+\sqrt{m}}$ są obie całkowite.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 157 /WT=3,83/ i 158 /WT=1,89/ z numeru 10/1987

Mirosław Mikucki	- Augustów	44,57pkt
Konrad Pióro	- Warszawa	43,95pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	43,15pkt
Piotr Wach	- Katowice	41,59pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,85pkt
Adam Ruszel	- Krosno	38,97pkt

Pan M. Mikucki - numer 52 w Klubie 44 M.

161. Wymogom zadania czyni zadość na przykład operacja

$$a*b = \begin{cases} \dfrac{1}{a-b} & \text{gdy } a \neq b \\ 0 & \text{gdy } a = b \end{cases}.$$

Odejmowanie i dodawanie wyrażają się przez $*$ w sposób oczywisty:

$$a-b = (a*b)*0, \quad a+b = a-(0-b) = (a*((0*b)*0))*0$$

(wzory słuszne dla wszystkich a, b). Jeszcze prościej wyraża się branie odwrotności:

$$\frac{1}{a} = a*0 \quad (\text{dla wszystkich } a \neq 0).$$

Pozostaje dowieść, że mnożenie wyraża się przez $*$ To zaś wynika z napisanych wyżej formuł i z następujących tożsamości:

$$(1) \qquad a^2 = \begin{cases} a - \dfrac{1}{\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{a-1}} & \text{dla } a \neq 0,\ a \neq 1 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \\ 1 & \text{dla } a = 1 \end{cases} \qquad -\frac{a}{2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\dfrac{1}{-a} - \dfrac{1}{a}} & \text{dla } a \neq 0 \\ 0 & \text{dla } a = 0 \end{cases}$$

$$(2) \qquad ab = -\frac{((a-b)^2 - a^2) - b^2}{2} \quad (\text{dla wszystkich } a, b).$$

Dowód jest w tym momencie w zasadzie zakończony; nie ma konieczności wykonywania wszystkich podstawień. Może jednak ciekawe będzie spostrzeżenie, że na przykład prawe strony równości (1) (w przypadku, gdy $a \neq 0, 1$) zapiszą się jako

$$(3) \qquad (a*((a*0)*(a*1)))*0, \qquad (0*a)*(a*0).$$

Tożsamość (2) — po uwzględnieniu równości wcześniejszych — prowadzi do wzoru

$$(4) \qquad ab = \begin{cases} A & \text{jeśli } a \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ b \neq 1,\ a*b \neq 0,\ a*b \neq 1 \\ B & \text{jeśli } a \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ b \neq 1,\ a*b = 1 \\ C & \text{jeśli } a \neq 0,\ a \neq 1,\ b \neq 0,\ b \neq 1,\ a*b = 0 \\ a & \text{jeśli } b = 1 \\ b & \text{jeśli } a = 1 \\ 0 & \text{jeśli } b = 0 \\ 0 & \text{jeśli } a = 0 \end{cases}$$

gdzie A oraz B są wyrażeniami wypisanymi na tylnej okładce tego numeru, C zaś oznacza napis (3). Formułę dla ilorazu a/b (dla $b \neq 0$) otrzymamy z (4) zastępując wszędzie b przez $(b*0)$.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 F" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 55 /WT=1,94/ i 56 /WT=3,21/ z numeru 10/1987

Dzierżysław Lipniacki	- Lublin	36,22pkt
Bogusław Mikielewicz	- Brodnica	31,59pkt
Janusz Osada	- Legnica	24,07pkt
Roman Musiał	- Katowice	21,98pkt
Andrzej Eilmes	- Gorlice	20,82pkt
Piotr Korczyński	- Warszawa	19,76pkt
Piotr Bała	- Toruń	19,31pkt

Z powodu nieumieszczenia w "Delcie" nr 2/1988 czołówki ligi fizycznej nie został odnotowany fakt wejścia do Klubu 44 F z numerem ósmym pana Jacka Stelmacha z Zabrza.

162. Przypuśćmy, że liczby całkowite $m, n \geqslant 0$ spełniają podany warunek. Liczby $\sqrt{m}$, $\sqrt{n}$ są więc całkowite. Można przyjąć, że $m \leqslant n$. Oczywiście para $(m, n) = (0, 0)$ jest rozwiązaniem zadania. Zakładajmy w dalszym ciągu, że $n > 0$. Mamy nierówność:

$$\sqrt{n+\sqrt{m}} - \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2}.$$

Wyrażenie po lewej stronie jest liczbą całkowitą nieujemną i wobec otrzymanej nierówności musi być zerem, a to znaczy, że $m = 0$. Zadany warunek przybiera postać żądania, by liczby $\sqrt[4]{n}$ i $\sqrt{n}$ były całkowite. Stąd odpowiedź: para (m, n) jest rozwiązaniem zadania wtedy i tylko wtedy, gdy jedna z liczb m, n jest równa zeru, a druga jest czwartą potęgą liczby całkowitej.