KĄCIK PRAC uczniowskich

Rozwiązanie zadania M 504. Tak. Ustawiając odpowiednio kije można zmierzyć sumę oraz różnicę ich długości. Jeśli w wyniku pomiarów otrzymamy liczby s i r, to uznamy, że dłuższy kij ma długość $\frac{1}{2}(s+r)$, krótszy zaś $\frac{1}{2}(s-r)$. Oznaczmy przez d i k rzeczywiste długości kijów. Mamy $s = d+k+X$, $r = d-k+Y$, gdzie X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi, $EX = EY = 0$, $D^2X = D^2Y = \sigma^2$. Stąd

$$\frac{1}{2}(s+r) = d+\frac{1}{2}(X+Y),$$

$$\frac{1}{2}(s-r) = k+\frac{1}{2}(X+Y).$$

Błąd pomiaru jest zmienną losową $\frac{1}{2}(X+Y)$. Z niezależności X i Y wynika, że

$$D^2\left(\frac{1}{2}(X+Y)\right) = \frac{1}{4}(D^2X+D^2Y) = \frac{\sigma^2}{2}.$$

Odchylenie standardowe błędu wynosi więc $\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Taki wynik wymagałby przeprowadzenia dwóch pomiarów długości każdego kija.

Gry

Zacznijmy od przykładów.

Przykład 1: A i B grają w następującą grę. Biorą liczbę naturalną n i jeden z graczy odejmuje od niej jedną z liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Drugi z graczy odejmuje jedną z tychże liczb od wyniku otrzymanego przez przeciwnika i tak na przemian. Wygrywa ten, kto poda w wyniku liczbę 0. Jaka jest strategia w tej grze? To proste. Musimy, o ile to możliwe, podawać przeciwnikowi liczby podzielne przez 10. Jeśli początkowe warunki gry (liczba n) pozwolą nam podać mu liczbę zakończoną zerem, to w odpowiedzi dostaniemy liczbę z ostatnią cyfrą różną od zera i znów podamy liczbę z zerem na końcu. W ten sposób napiszemy w końcu liczbę 0 i wygramy.

Przykład 2: Zasady podobne, z tym że od liczby, którą podał nam przeciwnik, możemy odjąć jej dzielnik pierwszy lub liczbę 1. Dobra strategia nie jest tu od razu widoczna, ale jest zaskakująco prosta. Musimy podawać przeciwnikowi liczby podzielne przez 4. Rzeczywiście, dając przeciwnikowi liczbę podzielną przez 4 otrzymamy w odpowiedzi liczbę niepodzielną przez 4 (bo nie można odejmować wielokrotności liczby 4), a więc:
albo liczbę postaci $4k+1$ i wtedy podamy $4k = 4k+1-1$,
albo liczbę postaci $4k+2$ i wtedy podamy $4k = 4k+2-2$,
albo liczbę postaci $4k+3$ i wtedy podamy $4k+3-p$, gdzie p jest dzielnikiem pierwszym liczby $4k+3$ dającym z dzielenia przez 4 resztę 3 (taki dzielnik zawsze istnieje), czyli możemy znowu dać w odpowiedzi liczbę podzielną przez 4.

Te dwa przykłady pokazują, jak można tworzyć nowe gry. Wystarczy umówić się, jakie liczby można odejmować od jakich i gra gotowa. Znalezienie strategii w takiej grze to zbadanie, które liczby są wygrywające (w pierwszym przykładzie są to liczby podzielne przez 10, a w drugim podzielne przez 4).

I kolejny temat pracy konkursowej mamy gotowy: wymyślić i zbadać kilka tego typu gier.

J. W.

Kto ma rację

Wśród zadań na pisemnym egzaminie wstępnym na matematykę było też następujące:

Zbiór $N = \{1, 2, \dots, 2n\}$ podzielono losowo na dwa podzbiory n-elementowe. Obliczyć prawdopodobieństwo p zdarzenia, że 1 i 2 znalazły się równocześnie w jednym z podzbiorów.

Po egzaminie podsłuchałem taką, mniej więcej, rozmowę.
— Z rachunku to mam chyba dobrze.
— Ja chyba też. Ile ci wyszło?
— $\dfrac{2\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$
— To mi co innego. Jak robiłeś?
— Wszystkich możliwych podziałów jest oczywiście tyle, ile jest sposobów wyboru n-elementowego podzbioru X ze zbioru N, a więc $\binom{2n}{n}$. Zdarzeniu sprzyja ten wybór, dla którego $\{1, 2\} \subset N \setminus X$ lub $\{1, 2\} \subset X$. Pierwszy z tych warunków oznacza, że $X \subset \{3, 4, \dots, 2n\}$ i mamy tu $\binom{2n-2}{n}$ możliwości. Teraz $\{1, 2\} \subset X$ oznacza, że $N \setminus X \subset \{3, 4, \dots, 2n\}$, czyli znowu jest $\binom{2n-2}{n}$ możliwości. W efekcie $p = \dfrac{2\binom{2n-2}{n}}{\binom{2n}{n}}$.
— Chyba dobrze. Ja liczyłem „od przeciwnego", czyli znajdowałem najpierw prawdopodobieństwo tego, że 1 i 2 są w różnych podzbiorach. Tak jak i u ciebie myślimy o wybieraniu n-elementowych podzbiorów. Wszystkich wyborów mamy $\binom{2n}{n}$. Zdarzeniu sprzyja wybór takiego podzbioru X, że $1 \in X$ i $2 \notin X$ lub $2 \in X$ i $1 \notin X$. Znaczy więc, że jeden element zbioru X pochodzi ze zbioru $\{1, 2\}$, pozostałe zaś (jest ich $n-1$) ze zbioru $\{3, 4, \dots, 2n\}$. Mamy więc $2\binom{2n-2}{n-1}$ takich możliwości. Stąd dostajemy, że $p = 1 - \dfrac{2\binom{2n-2}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.
— ...

Rozmowa toczyła się dalej, aż do wyjaśnienia, kto ma rację.

R. Sz.