punktów odległych każdy o $\frac{1}{q}$ od dwóch sąsiednich. Co najmniej jeden punkt tego zbioru leży w odcinku I, a jest postaci $\frac{p}{q}$, gdzie p jest liczbą całkowitą, więc jest wymierny.

Ograniczymy się teraz do odcinka [0, 1]. I w nim liczby wymierne tworzą zbiór gęsty. Oznaczmy go przez W. „Otoczmy" każdą liczbę ze zbioru W odcinkiem, to znaczy utwórzmy dla każdej liczby $\frac{p}{q}$ odcinek $\left[\frac{p}{q}-\delta, \frac{p}{q}+\delta\right]$, gdzie δ jest liczbą dodatnią. Nie zakładamy, że jest to za każdym razem ta sama liczba dodatnia. Każda liczba z W staje się w ten sposób środkiem jakiegoś wybranego odcinka. O długościach tych odcinków nic nie zakładamy. Czy te odcinki łącznie zawsze muszą pokryć cały odcinek [0, 1]? Innymi słowami, czy każdy punkt w [0, 1] zawsze leży w którymś z wybranych odcinków, jakkolwiek je wybraliśmy? Pamiętajmy, że w dowolnej bliskości każdego punktu leży jakiś punkt wymierny i postarajmy się odpowiedzieć na zadane pytanie. Co podpowiada intuicja? Myślę, że prawie każdemu podpowiada „tak", a więc kłamie.

Liczby z W nie dadzą się ponumerować w porządku wzrastania, ale można to zrobić inaczej. Napiszmy: $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \ldots$. Widać, jak ten ciąg jest zbudowany i że wystąpi w nim każda liczba wymierna między 0 a 1, i to nawet nie raz, lecz nieskończenie wiele razy, np. $\frac{1}{2}$ wystąpi także jako $\frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}$ itd. Poskreślajmy teraz te liczby, które już raz wystąpiły, to znaczy zostawmy tylko ułamki nieskracalne. Otrzymamy ciąg $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ o wyrazach $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = \frac{1}{2}$, $w_4 = \frac{1}{3}$, $w_5 = \frac{2}{3}$, $w_6 = \frac{1}{4}$, $w_7 = \frac{3}{4}$, $w_8 = \frac{1}{5}, \ldots, w_{12} = \frac{1}{6}$, $w_{13} = \frac{5}{6}, \ldots$ Jest to dokładnie ciąg wszystkich różnych liczb ze zbioru W, które w ten sposób zostały ponumerowane. Np. siódmą z kolei liczbą wymierną w [0, 1] jest $\frac{3}{4}$. Otoczmy teraz każdą liczbę w_n odcinkiem $I_n = \left[w_n - \frac{1}{2^{n+2}}, w_n + \frac{1}{2^{n+2}}\right]$. Jego długość wynosi $\frac{1}{2^{n+1}}$. Odcinki te będą

Rozwiązanie zadania F 240. Całkowita energia elektronu w odległości r od jądra jest określona równaniem

$$W = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

gdzie m_e, e i p są odpowiednio masą, ładunkiem i pędem elektronu. Minimalną energię otrzymamy dla najmniejszych wartości p i r. Jednakże zgodnie z zasadą nieoznaczoności mamy $\Delta p \cdot \Delta r \geq h/2\pi$. Zauważmy, że w zapisie tego wyrażenia prędkość występująca w pędzie jest prędkością w kierunku r (radialną). Średnie wartości promienia $\langle r \rangle$ i pędu $\langle p \rangle$ nie mogą być mniejsze od nieoznaczoności położenia Δr i pędu Δp. Stąd dla średnich wartości r i p mamy

$$\langle r \rangle \cdot \langle p \rangle \geq h/2\pi.$$

Średnia wartość energii całkowitej W jest równa

$$\langle W \rangle = \frac{(h/2\pi)^2}{2m_e\langle r^2 \rangle} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 \langle r \rangle}.$$

Wielkość ta jest najmniejsza, gdy

$$\langle r \rangle = \frac{4\pi\varepsilon_0 (h/2\pi)^2}{m_e e^2}.$$

Jest to wartość promienia pierwszej orbity w modelu Bohra. Minimalna wartość energii odpowiadająca energii stanu podstawowego jest więc równa

$$W_0 = -\frac{m_e e^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2 (h/2\pi)^2}.$$

Patrz w niebo

Po zimowej obfitości jasnych, przyciągających wzrok gwiazd, niebo wiosenne prezentuje się raczej skromnie. Jednak właśnie teraz nadarza się sposobność do zwrócenia uwagi na trzy największe (pod względem zajmowanej powierzchni) gwiazdozbiory. Są nimi (wg malejącej powierzchni) Hydra (*Hydra*), Panna (*Virgo*) i Wielka Niedźwiedzica (*Ursa Major*).

Hydra jest konstelacją bardzo wyciągniętą w rektascensji — obejmuje swymi splotami ponad 1/4 obwodu nieba. Jej „głowa", składająca się z czterech słabych gwiazdek, wschodzi o tej porze roku jeszcze w dzień — około południa, a koniec „ogona" pojawia się nad horyzontem dopiero po zapadnięciu całkowitego zmroku. Szczęśliwie „głowa" nie zdąża jeszcze zajść w tym czasie, a więc przez parę godzin można Hydrę podziwiać w całości. Ponad półtora raza dłuższy w rektascensji jest, widoczny u nas o każdej porze roku, Smok (*Draco*). Jednak, jako gwiazdozbiór leżący w pobliżu bieguna, jest na niebie znacznie bardziej zwinięty, w związku z czym ma powierzchnię prawie o 20% mniejszą od powierzchni Hydry — zajmuje ósmą pozycję w grupie największych gwiazdozbiorów.

Konstelacja Panny — gwiazdozbiór drugi pod względem zajmowanej powierzchni — góruje o tej porze roku około północy. Przypomnijmy, że gdy Słońce znajduje się w znaku Barana (kwiecień), jest ono — wskutek przesunięcia precesyjnego — w gwiazdozbiorze Ryb. Panna, jako leżąca po przeciwnej, w stosunku do Ryb, stronie Zodiaku, góruje w momencie dołowania Słońca, czyli o północy (o regularności pojawiania się gwiazdozbiorów zodiakalnych pisaliśmy w *Delcie* 2/1987).

Jeśli chodzi o Wielką Niedźwiedzicę, to jej obecność na niebie o żadnej porze roku nie budzi zdziwienia. Jest powszechnie znanym gwiazdozbiorem okołobiegunowym, który w naszych szerokościach geograficznych nigdy nie wschodzi ani nie zachodzi. Tak się jednak składa, że właśnie w podobnym czasie, co Hydra i Panna, Wielka Niedźwiedzica zajmuje najwyższe na niebie, a więc najdogodniejsze do obserwacji, położenie. Fakt, że Wielka Niedźwiedzica jest

Osoby, które w celu odnalezienia Hydry zechcą skorzystać z mapy nieba wydrukowanej na okładkach rocznika *Delty* z 1985 roku lub obrotowej mapy nieba wydanej przez PTMA, mogą napotkać poważne trudności. Czyżby nie zaznaczono tam największego gwiazdozbioru? Rzecz jasna, jest to niemożliwe. Na mapach tych Hydra została nazwana Wężem Wodnym. Rzeczywiście czasem tak się ją nazywa, choć jest to dość niebezpieczne, gdyż może prowadzić do nieporozumień. Na południowej półkuli nieba leży gwiazdozbiór o nazwie Wąż Morski (*Hydrus*) i z Wężem Wodnym łatwo go pomylić.

w rozmaity sposób zachodzić na siebie. Czy łącznie pokryją zbiór [0, 1]? Gdyby tak było, to ułożone jeden za drugim, tak, żeby tylko końcami się stykały, musiałyby utworzyć odcinek długości co najmniej 1. Tymczasem suma ich długości, czyli suma ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $\frac{1}{4}$ i ilorazie $\frac{1}{2}$ wynosi zaledwie $\frac{1}{2}$.

W tym dowodzie nie korzystaliśmy naprawdę z tego, że liczby w_n są wymierne. Istotne było, że dadzą się ponumerować, czyli ustawić w ciąg. Jeśli elementy zbioru można ponumerować, zbiór nazywa się przeliczalny. Udowodniliśmy zatem, że jeśli zbiór w [0,1], choćby gęsty, jest przeliczalny, to jego punkty można otoczyć odcinkami w ten sposób, żeby nie cały odcinek [0,1] został pokryty. Co więcej, można sobie długości tych odcinków dowolnie z góry zadać, na przykład tak, żeby ich suma była mniejsza od dowolnie zadanej liczby $\varepsilon > 0$.

Dla zbioru W mogliśmy zamiast I_n wziąć równie dobrze odcinki $J_n = \left[w_n - \frac{1}{2^{n+k}}, w_n + \frac{1}{2^{n+k}}\right]$, gdzie k jest dowolnie duże, a niekoniecznie równe 2. Przy odpowiednio dużym k będzie $\sum_{n=1}^{\infty} |J_n| < \varepsilon$. Zbiór na prostej, który można pokryć odcinkami o dowolnie małej sumie długości, nazywa się zbiorem miary 0, a więc każdy zbiór przeliczalny jest miary 0. Zbiór wszystkich liczb wymiernych także jest przeliczalny, a więc miary 0. Jak go ustawić w ciąg? To trochę trudniejsze niż dla liczb wymiernych w odcinku, ale można się o to pokusić. A czy w ogóle istnieją zbiory, których nie można ustawić w ciąg?

Oczywiście nie jest zbiorem miary 0 żaden odcinek, bo go w żaden sposób nie pokryjemy przedziałami o sumie długości mniejszej niż jego własna długość. Stąd wniosek, że zbiór liczb z odcinka [0,1], a tym bardziej zbiór wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny — jego elementów nie można ponumerować, nie starczy numerów. Inaczej mówiąc — liczb rzeczywistych już w odcinku [0,1] jest więcej niż liczb naturalnych. Zatem nieskończoność nieskończoności nierówna — jedna może być większa od drugiej. Co na to nasza intuicja? To odkrycie sprzed 113 lat, jedno z największych w historii matematyki, zawdzięczamy matematykowi niemieckiemu Georgowi Cantorowi.

Nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych wynikła nam stąd, że nie jest to zbiór miary 0. A czy każdy zbiór miary 0 musi być przeliczalny? Odpowiemy na to pytanie w drugiej części tego artykułu.

Rozwiązanie zadania M500. Aby zrozumieć, co właściwie robi ten nieco zagmatwany algorytm, należy obliczyć kilka początkowych wyrazów ciągu (a_n). Po otrzymaniu samych zer i jedynek można zacząć coś podejrzewać. Wynik, zapisany jako ułamek dwójkowy: 1,0110101 ... (co daje ułamek dziesiętny 1,414 ...), sprawi, że podejrzenia staną się bardziej konkretne. I rzeczywiście — dostajemy rozwinięcie dwójkowe $\sqrt{2}$.
Dla dowodu zauważmy, że $4(2-a_0^2) = r_1$, $4(2\cdot 4-(2^1a_0+2^0a_1)^2) = 4(2\cdot 4-4a_0^2-s_1) = 4(r_1-s_1) = r_2$ i ogólnie, $4(2\cdot 4^n-(2^na_0+\ldots+2^0a_n)^2) = r_{n+1}$.
Stąd $p_n^2 = (a_0+a_12^{-1}+\ldots+a_n2^{-n})^2 \leqslant 2$, ponadto $(p_n+2^{-n})^2 > 2$.
Zatem $p_n \to \sqrt{2}$. Zauważmy jeszcze, że $a_n \in \{0,1\}$. Gdyby bowiem $a_n \geqslant 2$, to $(a_0+a_12^{-1}+\ldots+2\cdot 2^{-n}) \leqslant 2$, więc $(a_0+a_12^{-1}+\ldots+(a_{n-1}+1)2^{-(n-1)})^2 \leqslant 2$ — sprzeczność, bo $(p_{n-1}+2^{-(n-1)})^2 > 2$.
Ostatecznie, ciąg (a_n) nie jest okresowy, bo $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

trzecim co do wielkości gwiazdozbiorem, może budzić zdziwienie jedynie wśród osób, które utożsamiają ją z Wielkim Wozem. Sam Wielki Wóz nie jest aż tak duży, stanowi on tylko fragment Wielkiej Niedźwiedzicy — jej „tułów" i „ogon". „Przednie łapy" i „łeb" Niedźwiedzicy (utworzone ze znacznie słabszych gwiazd) leżą aż nad „głową" Hydry. Wielka Niedźwiedzica jest prawie tak samo długa jak Hydra, tyle że podobnie jak Smok leży w pobliżu bieguna, gdzie koła rektascensji zagęszczają się.

Inne, charakterystyczne zgrupowanie rozległych gwiazdozbiorów można zaobserwować w wieczory jesienne, kiedy to górują Wodnik (*Aquarius*), Pegaz (*Pegasus*), Erydan (*Eridanus*) i Wieloryb (*Cetus*). W ten sposób niemal wyczerpaliśmy listę dziesięciu największych gwiazdozbiorów obu półkul nieba (patrz tabelka). Z pozostałych dwóch Herkules (*Hercules*) jest najlepiej widoczny w wieczory letnie, Centaura (*Centaurus*) zaś praktycznie nie widać w naszych szerokościach geograficznych — jego niewielkie fragmenty można dostrzec tuż nad horyzontem pod „ogonem" Hydry.

Zwróćmy uwagę, że największe gwiazdozbiory wcale nie są najbardziej znane (oczywiście z wyjątkiem Wielkiej Niedźwiedzicy), w tym sensie, że nie jest łatwo wskazać ich kształty na niebie. Zawierają stosunkowo niewiele jasnych gwiazd i dlatego prezentują się o wiele mniej okazale niż np. tak znane konstelacje nieba zimowego jak Orion (*Orion*) czy Bliźnięta (*Gemini*).

Dawniej największym gwiazdozbiorem był Okręt Argonautów leżący na południowej półkuli nieba. Zgodnie z obowiązującymi do dziś postanowieniami Międzynarodowej Unii Astronomicznej Okręt rozpadł się na mniejsze fragmenty — Kil (*Carina*), Rufę (*Puppis*) i Żagiel (*Vela*) — i jako całość przestał istnieć. Tym samym Hydra stała się największą konstelacją i ogólnie można powiedzieć, że znaczna większość gwiazdozbiorów zajmujących największe powierzchnie leży na północnej półkuli nieba. Czy dotyczy to również gwiazdozbiorów najmniejszych? Napiszemy o tym innym razem.

mgr Joanna UDALSKA

Dziesięć największych gwiazdozbiorów

Nazwa łacińska	Powierzchnia (w stopniach kwadratowych)
Hydra	1303
Virgo	1294
Ursa Major	1280
Cetus	1231
Hercules	1225
Eridanus	1138
Pegasus	1121
Draco	1083
Centaurus	1060
Aquarius	980