Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji „Delty"

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 1988

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 155 /WT=2,45/ i 156 /WT=2,39/
z numeru 9/1987

Konrad Pióro	- Warszawa	42,82pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	42,68pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	41,83pkt
Piotr Wach	- Katowice	41,59pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,85pkt
Krzysztof Hryniewiecki	- Białystok	37,86pkt

Zadania z matematyki nr 167, 168

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

167. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC oraz punkt P w jego wnętrzu, przy czym $|\sphericalangle CAP| = |\sphericalangle CBP|$. Niech K i L będą rzutami punktu P na boki $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$. Udowodnić, że symetralna odcinka $\overline{KL}$ połowi bok $\overline{AB}$.

168. Podać warunek konieczny i dostateczny, jaki muszą spełniać liczby naturalne n i k, aby szachownicę o wymiarach $n\times n$ można było pokryć nie zachodzącymi na siebie płytkami o wymiarach $1\times k$.

Zadanie **168** zaproponował pan Piotr Chrząstowski z Warszawy.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 11/1987

Przypominamy treść zadań:

159. Dany jest n-punktowy zbiór Z na płaszczyźnie ($n \geqslant 3$), bez trójki współliniowej. Dowieść, że $|\sphericalangle PQR| \leqslant 180°/n$ dla pewnych punktów $P, Q, R \in Z$.
160. Wykazać zbieżność ciągu określonego wzorem $x_{n+2} = 2(x_n + x_{n+1})^{-1}$; x_1, x_2 — dane liczby dodatnie.

159. Niech $W = \operatorname{conv} Z$ będzie najmniejszym zbiorem wypukłym zawierającym Z. Jest to wielokąt. Przypuśćmy, że ma on k wierzchołków ($k \leqslant n$); pozostałe $n-k$ punktów znajduje się w jego wnętrzu. Suma miar kątów wewnętrznych wielokąta W wynosi $(k-2)\cdot 180°$, a zatem najmniejszy z nich ma miarę $\psi \leqslant (k-2)\cdot 180°/k \leqslant (n-2)\cdot 180°/n$. Z wierzchołka tego kąta prowadzimy odcinki do wszystkich (poza nim samym) punktów zbioru Z. Wyznaczają one $n-2$ kątów wypukłych o łącznej rozwartości ψ. Najmniejszy z tych kątów ma miarę $\varphi \leqslant \psi/(n-2) \leqslant 180°/n$. Jest to szukany kąt PQR.

160. Lemat. Jeśli dla pewnego $n > 2$ wyrazy x_{n-2}, x_{n-1} należą do przedziału $I_a = \langle 1/a; a\rangle$, gdzie $a \geqslant 1$, to wyrazy x_{n+1}, x_{n+2} należą do przedziału $I_b = \langle 1/b; b\rangle$, gdzie

$$b = a\cdot\frac{8+5(a^2-1)}{8+6(a^2-1)} \geqslant 1.$$

Dowód. Z podanego wzoru rekurencyjnego wynika, że jeśli $x_{n-2}, x_{n-1} \in I_a$, to $x_n \in I_a$. Kolejny wyraz ciągu wyraża się wzorem $x_{n+1} = F(x_{n-2}, x_{n-1})$, gdzie

$$F(x,y) = \frac{2}{y+\dfrac{2}{x+y}} = \frac{2x+2y}{xy+y^2+2}.$$

Badamy zachowanie funkcji F na zbiorze $I_a\times I_a$. Przy ustalonym y mianownik $y+2(x+y)^{-1}$ maleje, gdy x rośnie. Zatem dla dowolnego punktu $(x,y)\in I_a\times I_a$ zachodzi nierówność $g(y) \leqslant F(x,y) \leqslant h(y)$, gdzie

$$g(y) = F\left(\frac{1}{a}, y\right) = \frac{2ay+2}{ay^2+y+2a}, \qquad h(y) = F(a,y) = \frac{2y+2a}{y^2+ay+2}.$$

Wartości ekstremalne funkcji F na kwadracie $I_a\times I_a$ to: minimum funkcji g oraz maksimum funkcji h na przedziale I_a. Znajdujemy te wartości w zwykły sposób rachunkiem różniczkowym. Wynik obliczeń:

$$\min_{y\in I_a} g(y) = g(a) = \frac{2a^2+2}{a^3+3a} = \frac{1}{a}\cdot\frac{4+2c}{4+c}$$
$$\max_{y\in I_a} h(y) = h\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{2a^3+2a}{3a^2+1} = a\cdot\frac{4+2c}{4+3c} \qquad (c = a^2-1).$$

Tak więc, jeżeli $x_{n-2}, x_{n-1}\in I_a$, to

$$\frac{1}{a} \leqslant x_n \leqslant a, \qquad \frac{1}{a}\cdot\frac{4+2c}{4+c} \leqslant x_{n+1} \leqslant a\cdot\frac{4+2c}{4+3c}.$$

Dodając stronami i biorąc odwrotność stwierdzamy, że następny wyraz $x_{n+2} = 2(x_n+x_{n+1})^{-1}$ spełnia nierówność

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{8+6c}{8+5c} \leqslant x_{n+2} \leqslant a\cdot\frac{8+2c}{8+3c}.$$

Lewy człon ostatniej nierówności równa się $1/b$. Nietrudno się przekonać, że prawy człon jest liczbą $\leqslant b$ (stąd w szczególności dostajemy $b \geqslant 1$), a także, że otrzymane powyżej ograniczenia na x_{n+1} również nie wychodzą poza przedział I_b.
To kończy dowód lematu.

Dalej rozumujemy tak: bierzemy dowolną liczbę $a \geqslant 1$ taką, żeby $x_1, x_2 \in I_a$ (wtedy też $x_3\in I_a$). Na mocy lematu $x_4, x_5\in I_b$, gdzie b jest liczbą określoną w lemacie ($a \geqslant b \geqslant 1$); także $x_6 \in I_b$. Oznaczamy b przez a_1 i powtarzamy rozumowanie. Postępując tak dalej, wnioskujemy indukcyjnie, że (dla $k = 1, 2, 3, \ldots$) wyrazy o numerach $3k+1$, $3k+2$, $3k+3$ należą do przedziału $I_{a_k} = \langle 1/a_k; a_k\rangle$, gdzie

$$a_{k+1} = a_k\cdot\frac{8+5(a_k^2-1)}{8+6(a_k^2-1)}; \qquad a_k \geqslant a_{k+1} \geqslant 1.$$

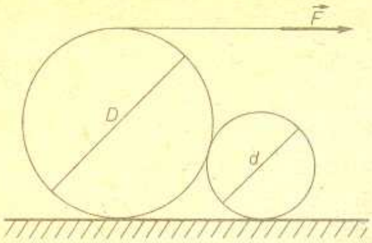
Istnieje wobec tego granica $s = \lim a_k \geqslant 1$, która musi spełniać równanie

$$s = s\cdot\frac{8+5(s^2-1)}{8+6(s^2-1)}.$$

Jedynym dodatnim pierwiastkiem tego równania jest $s = 1$. Stąd ostatecznie $\lim x_n = 1$.

Zadania z fizyki nr 65 i 66

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



Rys. 1

65. Na poziomym stole leżą dwa walce o średnicach D i d, które na całej długości — jednakowej dla obu walców — stykają się (rys. 1). Współczynnik tarcia (statycznego) między powierzchniami walców oraz między walcami a stołem wynosi f. Na walec o większej średnicy jest w środku jego długości nawinięta linka (przymocowana w pewnym miejscu do walca). Określić, przy jakim stosunku średnic D/d da się za pomocą poziomej siły F przyłożonej do końca linki przetoczyć duży walec przez mały i obliczyć wartość tej siły.

66. Obliczyć w przybliżeniu, jaki co najmniej powinien być promień planety o średniej gęstości $5 \cdot 10^3$ kg/m^3 i temperaturze powierzchni 300 K, aby mogła się na niej utrzymywać atmosfera składająca się z azotu i tlenu. Czy byłoby możliwe utrzymywanie się atmosfery na Księżycu?

Czełówka ligi zadaniowej "Klub 44 F"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 53 /WT=1,36/ i 54 /WT=3,26/
z numeru 9/1987

Pietr Wach	- Katowice	44,75pkt
Leszek Szalast	- Radzyń Pod	44,00pkt
Dzierżysław Lipniacki	-Lublin	32,17pkt
Bogusław Mikielewicz	-Brodnica	30,23pkt
Janusz Osada	- Legnica	24,07pkt
Andrzej Eilmes	- Gorlice	20,82pkt
Maciej Stasiak	- Człuchów	18,73pkt
Wiesław Kacprzak	- Kraków	18,33pkt

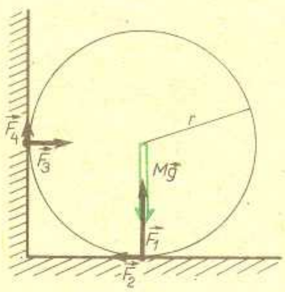
Panowie Wach i Szalast dołączają do grona członków Klubu 44 F, których liczba tym samym zaokrągla się do dziesięciu.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 11/1987

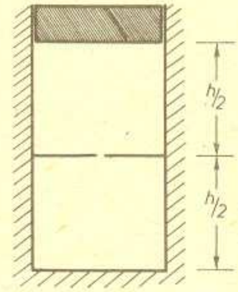
Przypominamy treść zadań:

57. W narożniku ścian poziomej i pionowej umieszczono jednorodną kulę obracającą się z początkową prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do krawędzi narożnika. Współczynnik tarcia kinetycznego kuli o ściany narożnika wynosi f. Obliczyć czas, jaki upłynie do zatrzymania ruchu obrotowego kuli oraz kąt, o który się w tym czasie kula obróci.

58. Pionowy cylinder, wypełniony powietrzem o ciśnieniu atmosferycznym p_0 i temperaturze T_0, zamknięty jest od góry początkowo unieruchomionym tłokiem o masie m. W połowie wysokości cylindra znajduje się nieruchoma przegroda z małym otworem. W pewnej chwili tłok zostaje zwolniony i opada, dochodząc do przegrody. Wyznaczyć końcową temperaturę powietrza w cylindrze przy zaniedbaniu tarcia tłoka o ścianki cylindra oraz wymiany ciepła między powietrzem a ściankami cylindra, przegrodą i tłokiem. Jaka porównawczo byłaby końcowa temperatura powietrza, gdyby otwór w przegrodzie był duży?



Rys. 2



Rys. 3

57. Na obracającą się kulę działają, poza siłą ciężkości Mg (M — masa kuli, g — przyspieszenie ziemskie), siły reakcji ścian narożnika F_1 i F_3 (prostopadłe do tych ścian) oraz siły tarcia F_2 i F_4 (równoległe do ścian) — jak na rysunku 2. Między siłami tarcia a siłami reakcji (nacisku) zachodzą związki: $F_2 = fF_1$, $F_4 = fF_3$. Ponieważ środek masy kuli pozostaje nieruchomy, wszystkie te siły muszą się równoważyć. Stąd mamy: $F_1 + F_4 = Mg$, $F_2 = F_3$. Moment sił działających na kulę względem jej środka ma wartość $(F_2+F_4)\, r$, gdzie r — promień kuli, i zwrot przeciwny do prędkości kątowej kuli. Powoduje on opóźnienie kątowe ε (ujemne przyspieszenie) kuli równe $\varepsilon = (F_2+F_4)\, r/I$,

gdzie $I = \dfrac{2}{5} Mr^2$ jest momentem bezwładności kuli.

Rozwiązując układ powyższych równań otrzymujemy

$$\varepsilon = \frac{5}{2}\,\frac{f(1+f)}{1+f^2}\,\frac{g}{r}.$$

Czas do zatrzymania kuli obliczamy jako

$$t = \frac{\omega}{\varepsilon} = \frac{2}{5}\,\frac{1+f^2}{f(1+f)}\,\frac{r\omega}{g}.$$

W tym czasie kula obróci się o kąt

$$\alpha = \frac{1}{2}\omega t = \frac{1}{5}\,\frac{1+f^2}{f(1+f)}\,\frac{r\omega^2}{g}.$$

58. Dzięki oporom przepływu powietrza przez mały otwór można przyjąć, że tłok dochodzi do przegrody z bardzo małą prędkością i że jego energia kinetyczna w tym momencie jest do pominięcia. Zatem praca sił działających na tłok jest równa przyrostowi energii wewnętrznej gazu ΔU:

$$\Delta U = (Sp_0 + mg)\, h/2, \tag{1}$$

gdzie S — pole powierzchni tłoka, g — przyspieszenie ziemskie, h — wysokość cylindra (rys. 3).

Ponieważ energia wewnętrzna gazu zależy jedynie od temperatury, jej przyrost w dowolnym procesie, w którym zachodzi ogrzewanie gazu od temperatury T_0 do temperatury T_1, jest taki sam jak w procesie ogrzewania izochorycznego:

$$\Delta U = nC_V\,(T_1 - T_0),$$

(n — liczba moli gazu, C_V — molowe ciepło właściwe przy stałej objętości).

Z przyrównania prawych stron powyższych równań otrzymujemy

$$T_1 = T_0 + \frac{(Sp_0 + mg)h}{2nC_V}. \tag{2}$$

Liczbę moli gazu zawartego w cylindrze możemy wyznaczyć z równania stanu gazu w sytuacji wyjściowej:

$$p_0 V_0 = n\mathrm{R} T_0$$

(V_0 — objętość cylindra, R — stała gazowa). Uwzględniając, że $V_0 = Sh$, mamy stąd

$$n = \frac{p_0 Sh}{\mathrm{R} T_0}.$$

Dla gazu o cząsteczkach dwuatomowych, jakim jest powietrze (składające się głównie z N_2 i O_2), $C_V = \dfrac{5}{2}\mathrm{R}$. Podstawiając wyrażenia na n oraz C_V do wzoru (2) otrzymujemy wzór na końcową temperaturę powietrza w cylindrze:

$$T_1 = T_0\left(1 + \frac{Sp_0 + mg}{5Sp_0}\right).$$

Sprawdźmy jeszcze, czy tłok w każdym przypadku dojdzie do przegrody. Wymaga to spełnienia warunku

$$Sp_1 \leqslant Sp_0 + mg. \tag{3}$$

Ciśnienie końcowe p_1 wyznaczamy z równania stanu

$$\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_0 V_0}{T_0}.$$

Po podstawieniu $V_1 = V_0/2$ oraz wyrażenia (2) na T_1 otrzymujemy

$$p_1 = \frac{12}{5} p_0 + \frac{2}{5}\frac{mg}{S}. \tag{4}$$

Z nierówności (3) po uwzględnieniu (4) wynika

$$m \geqslant \frac{7}{3}\frac{Sp_0}{g}.$$

Łatwo można obliczyć, że tłok stalowy, który by spełniał to kryterium, miałby grubość ponad 3 m (!).
Gdyby otwór w przegrodzie był duży, odpowiednio ciężki tłok dochodziłby do przegrody z niezaniedbywalną prędkością v. W takim przypadku zamiast równania (1) mielibyśmy

$$\Delta U = (Sp_0 + mg)\frac{h}{2} - \frac{mv^2}{2}.$$

W konsekwencji przyrost temperatury gazu byłby mniejszy.

W obu omawianych zadaniach należało zauważyć, że podany zestaw danych był niekompletny: w zadaniu **57** wymagany był dodatkowo promień kuli, w zadaniu **58** — pole powierzchni tłoka (ponadto w obu zadaniach przyspieszenie ziemskie).

Przy redakcji *Delty* powstał ZERO KOPRU, czyli Zespół Rozpowszechniania Konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją *Delty* w celu uzgodnienia szczegółów wizyty.

Liczymy na to, że uda nam się zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze — pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w *Delcie* 2/1988.

Duch Eulera na mostach królewieckich

KĄCIK PRAC uczniowskich

Dnia 22 września 1987 r. gościłem w LO w Działdowie. Moje spotkanie z młodzieżą tej szkoły zapoczątkowało działalność ZERO KOPRU, w skład którego wchodzą laureaci KOPRU z lat ubiegłych chętni do spotkań z uczniami i propagowania Konkursu. Zaaranżowanie spotkania w Działdowie przed ukazaniem się anonsu w *Delcie* było możliwe dzięki „głodnej kozie", która w ostatnim finale KOPRU zdobyła brązowy medal, czym umożliwiła wcześniejszy kontakt redakcji *Delty* ze szkołą w Działdowie. Za zaproszenie serdecznie dziękuję.

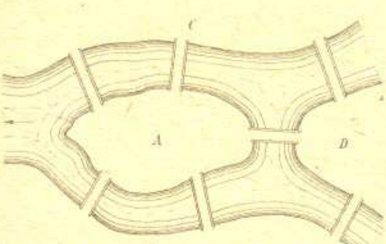
Jedną z przyczyn małej popularności KOPRU są trudności uczniów ze znalezieniem odpowiedniego tematu pracy. Może bowiem braknąć nie tylko pomysłu na interesujący temat, ale także rozeznania, co może być tematem pracy. ZERO KOPRU rozpoczyna więc nową formę działalności: publikowanie zagadnień do samodzielnego zbadania. Liczymy na to, że z jednej strony podsuniemy uczniom ciekawe tematy na Konkurs, a z drugiej pokażemy, jakiego rodzaju zagadnienia mogą być opracowane jako prace konkursowe. Chociaż ta rubryka jest adresowana do potencjalnych uczestników KOPRU, mamy nadzieję, że zaprezentowane w niej zagadnienia zainteresują wszystkich Czytelników *Delty*. Dziś temat pierwszy.

Jarosław WRÓBLEWSKI

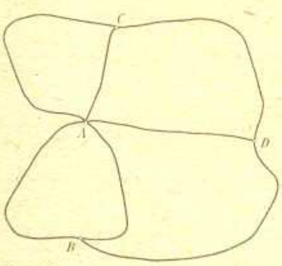
Przypomnijmy historię, którą zna zapewne większość Czytelników. Kiedyś postawiono Eulerowi zagadkę mostów królewieckich. Czy można przejść przez wszystkie 7 mostów Królewca (rys. 1) przechodząc przez każdy dokładnie 1 raz? Euler dał na to pytanie odpowiedź negatywną. Zagadka ta zainspirowała Eulera do zajęcia się następującym zagadnieniem: jakie figury dadzą się narysować na papierze bez odrywania ołówka i powtarzania linii?
Z matematycznego punktu widzenia problem obejścia mostów królewieckich jest równoważny problemowi jednobieżnego narysowania figury na rysunku 2. Liniom odpowiadają mosty (jedne i drugie musimy przebyć dokładnie 1 raz), węzłom zaś odpowiadają kawałki lądu, po których możemy chodzić do woli, ale bez istotnego efektu. Problem figur jednobieżnych (a więc i różnych układów wysp i mostów) został rozwiązany całkowicie. Układ wysp i mostów daje możliwość obejścia wszystkich mostów po 1 razie dokładnie wtedy, gdy zachodzą następujące warunki:

1) każde 2 mosty łączy droga po wyspach i mostach,
2) z prawie każdej wyspy wychodzi parzysta liczba mostów.

„Z prawie każdej" znaczy tu „z każdej" lub „z każdej z wyjątkiem dwóch".



Rys. 1



Rys. 2

A teraz wymyślmy sobie taką bajeczkę: Euler, który odebrał mieszczanom Królewca nadzieję na znalezienie sposobu obejścia wszystkich mostów, nie zaznał po śmierci spokoju, lecz pod postacią ducha każdej nocy ukazuje się na mostach Królewca i szuka sposobu obejścia wszystkich mostów. Będzie się ukazywał, dopóki mu się to nie uda. Trzeba jednak wiedzieć, że

1) duch znika po przejściu mostu, jeśli wszedł na niego lewą nogą,
2) jeśli zaś wszedł prawą, to po przejściu mostu jego postać się rozdwaja; każda z tak powstałych postaci idzie dalej swoją drogą,
3) od ducha żąda się, aby w czasie jego wędrówki każdy most był przebyty dokładnie raz przez jedną z postaci. Czy mu się to uda?

I tak oto z całkiem naiwnej bajeczki doszliśmy do całkiem poważnego problemu matematycznego. Bo oto stawiamy sobie dalsze pytania:

Jakie układy mostów może obejść duch, a jakich nie?
Czy mosty Królewca mogą obejść inne duchy (tzn. z innymi możliwościami zmiany liczby postaci po przejściu mostu)?
Co będzie, jeśli postawimy duchowi dodatkowy warunek dotyczący liczby postaci pozostałych po zakończeniu jego wędrówki?

Te zagadnienia nie były badane i matematyczne opracowanie chociaż części z nich może stanowić dobrą pracę konkursową. Widzisz więc, Czytelniku, że poważna matematyka nie musi się zaczynać całkiem poważnie.