Autor, który jest zdobywcą złotego medalu w Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki w 1987 roku, przedstawia skrót nagrodzonej pracy.

Izometrie przestrzeni metrycznych

Andrzej ŻUK

Geometria zajmuje się badaniem niezmienników izometrii. Opis izometrii jest więc bardzo ważny. Z książki Zofii Krygowskiej *Geometria dla klasy pierwszej* dowiadujemy się, że izometrie płaszczyzny euklidesowej to złożenia symetrii osiowych. Ich opis analityczny wygląda prosto, jeśli posłużymy się płaszczyzną liczb zespolonych. Czytelnik znający liczby zespolone może sprawdzić, że izometrie to funkcje zmiennej zespolonej postaci

$$f(z) = a \cdot z + b \quad \text{lub} \quad f(z) = a \cdot \bar{z} + b, \quad \text{gdzie} \quad |a| = 1 \text{ i } a, b \in \mathbb{C}.$$

Izometrie to przekształcenia zachowujące odległość (dokładnie: f jest izometrią, jeśli odległość X od Y jest równa odległości $f(X)$ od $f(Y)$ dla każdych punktów X, Y). Jeśli więc na pewnym zbiorze określimy sposób mierzenia odległości między jego elementami, to możemy badać izometrie tego zbioru. Funkcję określającą odległość każdej pary punktów nazywamy metryką. Zbiór wraz z metryką to przestrzeń metryczna (pełną definicję przestrzeni metrycznych oraz ich przykłady znajdzie Czytelnik w książeczce Sławomira Nowaka — *Co to znaczy blisko?*, Wydawnictwo specjalne *Delty*).

W pracy nadesłanej na konkurs podałem opisy izometrii pewnych przestrzeni metrycznych. Były to metryki, które najczęściej nazywane są: rzeka, kolejowa, miejska oraz Czebyszewa (określone na płaszczyźnie). Przedstawię teraz wyniki wraz ze szkicami rozumowań.

Metryka rzeka. Definiujemy ją następująco. Wyróżniamy na płaszczyźnie prostą, którą dalej będziemy nazywać rzeką. Jeśli punkty leżą na prostej prostopadłej do rzeki, to ich odległość jest zwykłą odległością euklidesową (rys. 1a). Gdy punkty nie leżą na takiej prostej, to ich odległość określamy jako sumę ich euklidesowych odległości od rzeki i odległości ich rzutów na rzekę (rys. 1b, c).

Okręgiem o środku S i promieniu r nazywamy zbiór tych punktów, których odległość od S jest równa r. Można więc oglądać okręgi w różnych metrykach. W metryce rzeka mogą wyglądać jak brzeg kwadratu (rys. 2c), jak brzeg kwadratu z wyrzuconym wierzchołkiem i dodanym jednym punktem (rys. 2b) lub mogą być zbiorem dwuelementowym (rys. 2a). Wspomniałem o okręgach, ponieważ dowody, w przypadku tej metryki i innych, opierały się na badaniu własności okręgów.

Przejdźmy teraz do znalezienia wszystkich izometrii tej przestrzeni metrycznej.

Po pierwsze uzasadnijmy, że obrazem punktu rzeki, w izometrii f, jest punkt rzeki. Gdyby było inaczej, to pewien okrąg będący brzegiem kwadratu (rys. 2c) zostałby przekształcony w okrąg, do którego należą tylko dwa punkty (rys. 2a). Jest to sprzeczność, ponieważ izometria jest przekształceniem różnowartościowym (dlaczego?).

Z łatwością sprawdzamy, że elementy zbioru M składającego się z
- przesunięć równoległych do rzeki,
- przesunięć równoległych do rzeki złożonych z symetrią osiową względem prostej prostopadłej do rzeki,

są izometriami w metryce rzeka i przekształcają płaszczyznę na płaszczyznę. Zauważmy, że odległość punktów rzeki to zwykła, euklidesowa ich odległość. Wcześniej pokazaliśmy, że izometria f przy metryce rzeka przekształca rzekę w rzekę, więc przekształcenie f jest izometrią rzeki, na której określona jest odległość euklidesowa. Wiemy, że izometrie prostej z metryką euklidesową to przesunięcia oraz symetrie środkowe. Jeśli f jest dla punktów rzeki przesunięciem o wektor $\mathbf{v}$, to definiujemy przekształcenie płaszczyzny g jako przesunięcie punktów płaszczyzny o wektor $\mathbf{v}$. Gdy f jest dla punktów rzeki symetrią względem punktu rzeki A, to przekształcenie płaszczyzny g określamy jako symetrię osiową o osi prostopadłej do rzeki i przecinającej ją w punkcie A. W ten sposób dla izometrii f określiliśmy izometrię g należącą do zbioru M, taką, że $f(X) = g(X)$, gdy X jest punktem rzeki. Zamiast izometrii f możemy więc badać izometrię $g^{-1} \circ f$, której punktami stałymi są punkty rzeki.

Proste prostopadłe do rzeki nazwijmy leśnymi (wyjaśnienie tej nazwy można znaleźć we wspomnianej już książeczce Sławomira Nowaka). Niech l oznacza jedną z nich. Obrazem l w izometrii $g^{-1} \circ f$ jest l. Mianowicie, niech A oznacza punkt przecięcia prostej l z rzeką, a punkt B, różny od A, niech będzie punktem prostej l. Ponieważ $g^{-1} \circ f(A) = A$, więc $g^{-1} \circ f(B)$ leży na okręgu o środku w A i promieniu równym odległości A od B (rys. 3). Obrazem B mogą być tylko punkty P_1 lub P_2 (należące do prostej l). Gdyby bowiem był nim np. punkt P_3, to odległość P_3 od A' byłaby różna od odległości B od A' (rys. 3), co przeczy definicji izometrii.

Odległość punktów leżących na prostej leśnej l to zwykła odległość euklidesowa tych punktów. Zatem izometria $g^{-1} \circ f$, przekształcająca l w l, jest izometrią prostej l w metryce euklidesowej. Ponieważ A jest punktem stałym, jest to identyczność lub symetria względem A. Na innych prostych leśnych złożenie $g^{-1} \circ f$ oczywiście też jest bądź identycznością, bądź symetrią względem punktu przecięcia prostej leśnej z rzeką. Ostatecznie $g^{-1} \circ f$ jest dziwną izometrią s, która proste leśne odbija względem rzeki lub jest dla nich identycznością, przy czym dla każdej prostej leśnej jest określona niezależnie od tego, jak działa na inne proste leśne. Zatem każda izometria f tej przestrzeni metrycznej jest postaci

$$f = g \circ s.$$

Można dać również analityczny opis izometrii tej przestrzeni metrycznej. Dla wygody rzekę utożsamiamy z osią OX. Otóż, izometria to funkcja postaci

$$f(X, Y) = (h(X), k(X) \cdot Y), \text{ gdzie } h(X) = X + m \text{ lub } h(X) = -X + m \ (m \in \mathbb{R}) \text{ oraz } k : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}.$$

Sprostowanie

W artykule *Nierówności cykliczne* (*Delta* 10/1987) błednie podałem liczby do kontrprzykładu A.Zulaufa. Powinny one mieć następujące wartości:

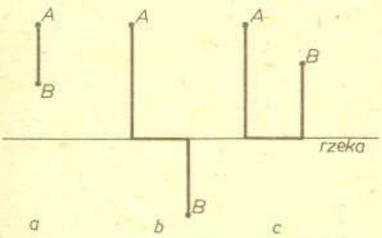
$$(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{14}) = \left(\frac{1007}{1000}, \frac{7}{1000}, \frac{1004}{1000}, \frac{6}{1000}, \frac{1001}{1000}, \frac{5}{1000}, 1, \frac{2}{1000}, \frac{1001}{1000}, 0, \frac{1004}{1000}, \frac{1}{1000}, \frac{1006}{1000}, \frac{4}{1000}\right).$$

Wtedy

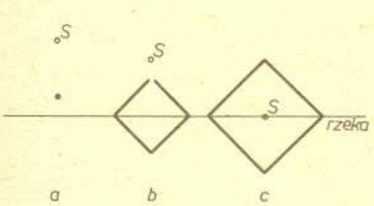
$$f(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{14}) \approx 6,999998254 < \frac{14}{2}.$$

Błąd, który powstał wyłącznie z mojej winy, zauważył p.Tomasz Starecki z Warszawy, za co Mu dziękuję, zaś Czytelników i Redakcję przepraszam.

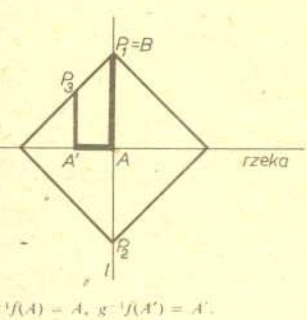
Jarosław GÓRNICKI



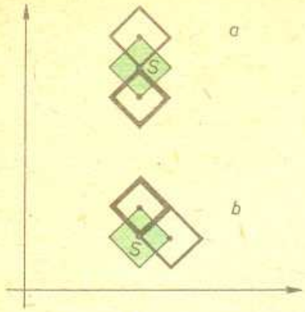
Rys. 1. Odległość punktów $A = (X_A, Y_A)$ i $B = (X_B, Y_B)$ w metryce rzeka jest równa $|Y_B - Y_A|$, gdy $X_A = X_B$, a $|Y_A| + |X_A - X_B| + |Y_B|$, jeśli $X_A \neq X_B$.



Rys. 2



Rys. 3. $g^{-1}f(A) = A$, $g^{-1}f(A') = A'$.

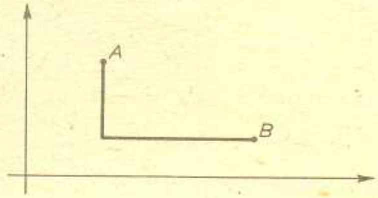


Rys. 6

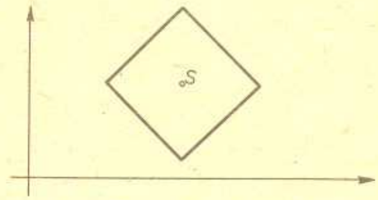
Czytelnika znającego pojęcie mocy zbioru powinien zastanowić fakt, że moc tego zbioru izometrii to $2^{\mathfrak{c}}$, podczas gdy moc zbioru izometrii płaszczyzny euklidesowej to tylko $\mathfrak{c}$.

Zbadanie metryki kolejowej dostarczyło przykładów izometrii, które nie są przekształceniami płaszczyzny na płaszczyznę (!).

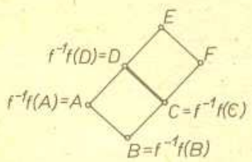
Następna metryka, którą się zajmowałem, to metryka miejska. Odległość punktów to suma euklidesowych odległości współrzędnych (rys. 4). Okręgi w tej metryce wyglądają jak brzeg kwadratu (rys. 5).



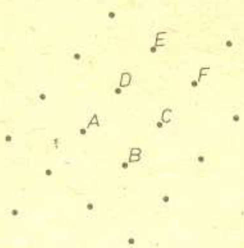
Rys. 4. Odległość $A = (X_A, Y_A)$ i $B = (X_B, Y_B)$ w metryce miejskiej jest równa $|X_A - X_B| + |Y_A - Y_B|$.



Rys. 5



Rys. 7



Rys. 8

Nietrudno sprawdzić, że zbiór K przekształceń składających się z

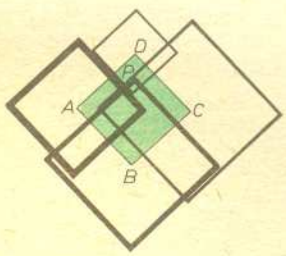
— przesunięć,

— odbić względem osi układu współrzędnych oraz prostych nachylonych do osi OX pod kątem 45° i 135°,

— obrotów o wielokrotności 90° wokół początku układu współrzędnych oraz ich złożeń,

składa się z izometrii tej przestrzeni metrycznej przekształcających płaszczyznę na płaszczyznę. Wprawdzie izometrie można wskazać bez trudu, to jednak dowód, że są to wszystkie izometrie, sprawił mi pewną trudność.

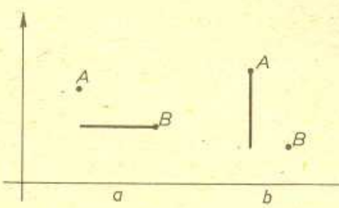
Metryka euklidesowa ma następującą własność: każda trójka niewspółliniowych punktów wyznacza jednoznacznie położenie punktu przez podanie jego odległości od tych punktów. Własność ta jest bardzo istotna, ponieważ dzięki niej obraz dowolnej trójki niewspółliniowych punktów wyznacza izometrię płaszczyzny. W metryce miejskiej nie istnieje trójka punktów o podobnej własności. Jednak obrazy pewnej czwórki punktów wyznaczają izometrię w metryce miejskiej.



Rys. 9

Jak więc poradziłem sobie z dowodem? Intuicyjnie oczywiste jest, że w dowolnej izometrii
1° wierzchołki kwadratu (okręgu w tej metryce) przejdą na „wierzchołki okręgu";
2° obrazami sąsiednich wierzchołków będą sąsiednie.
Aby dowieść 1°, należy wierzchołki okręgu wyróżnić metrycznie. Zauważmy, że odległość każdych dwóch wierzchołków jest równa podwojonej długości promienia okręgu. Nietrudno sprawdzić, że nie ma innej czwórki punktów okręgu o tej własności. Fakt 2° wykazujemy następująco. Narysujmy okręgi o środkach w wierzchołkach okręgu. Promienie ich niech będą równe promieniowi okręgu (rys. 6 a, b). Widzimy, że do części wspólnej okręgów, których środki są sąsiednimi wierzchołkami, należy nieskończenie wiele punktów (rys. 6 b), natomiast część wspólna okręgów o środkach w przeciwległych wierzchołkach to zbiór jednoelementowy (rys. 6 a). Dzięki różnowartościowości izometrii otrzymuje się więc prawdziwość 2°.

Niech f będzie izometrią tej metryki. Można sprawdzić, że na mocy 1° i 2° istnieje przekształcenie t, należące do zbioru K, takie, że $f(P) = t(P)$, gdzie $P \in \{A, B, C, D\}$ (wierzchołki okręgu, rys. 7). Zatem $t^{-1}f$ jest izometrią, której punkty stałe to A, B, C, D. Punkty C, D, E, F to również wierzchołki okręgu (rys. 7). Ponieważ $t^{-1}f(D) = D$ i $t^{-1}f(C) = C$, więc korzystając z 1° i 2° mamy $t^{-1}f(E) = E$ i $t^{-1}f(F)$ lub $t^{-1}f(E) = A$ i $t^{-1}f(F) = B$. Drugą możliwość odrzucamy, gdyż przeczy różnowartościowości izometrii. Podobnie uzasadniamy, że inne punkty tworzące kratę (rys. 8) są punktami stałymi izometrii $t^{-1}f$.

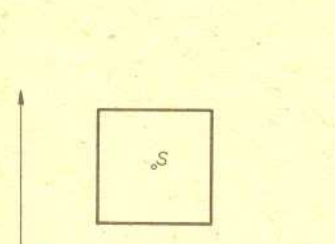


Rys. 10. Odległość punktów $A = (X_A, Y_A)$ i $B = (X_B, Y_B)$ w metryce Czebyszewa określamy jako max $\{|X_A - X_B|, |Y_A - Y_B|\}$.

Zauważmy, że punkt P jest jednoznacznie wyznaczony przez podanie jego odległości od wierzchołków koła, do którego należy (rys. 9), tzn. okręgi o środkach w wierzchołkach koła, przechodzące przez punkt P należący do tego koła, nie przecinają się w innym punkcie. Oznacza to, iż $t^{-1}f$ jest identycznością, czyli $f = t$.

Gdy do opisu użyjemy płaszczyzny liczb zespolonych, izometrie będą funkcjami zmiennej zespolonej postaci

$$f(z) = a \cdot z + b \text{ lub } f(z) = a \cdot \bar{z} + b, \text{ gdzie } a \in \{1, -1, i, -i\} \text{ i } b \in \mathbf{C}.$$



Rys. 11

Ostatnią metryką przebadaną przeze mnie jest metryka Czebyszewa. Odległość określamy tu jako maksimum odległości współrzędnych (rys. 10a, b). Okręgi w tej metryce wyglądają jak brzeg kwadratu (rys. 11). W przypadku tej przestrzeni metrycznej skonstruowałem izometrię z płaszczyzny z metryką Czebyszewa na płaszczyznę z metryką miejską. Dzięki temu badanie izometrii tej przestrzeni metrycznej sprowadziło się do badania izometrii poprzedniej przestrzeni metrycznej. Czytelnikowi nie powinno sprawić trudności sprawdzenie, że takim przekształceniem jest obrót płaszczyzny wokół początku układu współrzędnych o kąt 45°, złożony z jednokładnością o środku w początku układu i skali $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Dziwactwem tego artykułu były kwadratowe okręgi — zapewne Czytelnik uwierzy (a może i sprawdzi), że istnieją metryki, w których okręgi są sześciokątami, ale, o dziwo, nie istnieje metryka, w której okręgi są trójkątami równobocznymi.