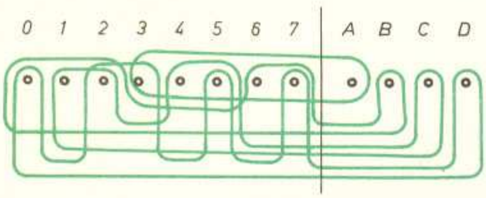
Co zrobić, aby komputer się nie mylił

Elementy składowe nowoczesnych komputerów są niezwykle niezawodne. Nowoczesny komputer, nawet osobisty (choć nie dotyczy to zabawek, takich jak ZX Spectrum), może pracować bezbłędnie nawet przez kilka lat. Projektanci komputerów muszą jednak zabezpieczyć użytkowników przed ewentualnymi przypadłościami sprzętu. Dotyczy to szczególnie pamięci, przechowującej od kilku milionów bitów przez wiele godzin (pamięć operacyjna) do kilku miliardów bitów przez miesiące i lata (pamięć dyskowa lub taśmowa). Wprawdzie prawdopodobieństwo uszkodzenia pojedynczego konkretnego bitu jest znikome, jednak ze względu na ogromną pojemność pamięci prawdopodobieństwo uszkodzenia któregoś z nich jest spore. A zmiana nawet jednego bitu, nie zauważona w porę, może spowodować katastrofalne wyniki.

Najprostszym sposobem wykrywania błędu pamięci jest stosowanie tzw. bitu parzystości. Do każdego słowa pamięci dodaje się jeden bit. Wpisuje się do niego zero lub jedynkę, tak, aby liczba wszystkich jedynek w słowie była, w zależności od systemu, parzysta albo nieparzysta. Wówczas zmiana pojedynczego bitu w słowie zmienia liczbę jedynek o jeden, czyli odwraca parzystość. Przy odczytaniu takiego słowa odpowiedni układ wykrywa niepoprawną liczbę jedynek i zgłasza błąd.

Zwykła kontrola parzystości ma jedną zaletę: jest prosta i wymaga jednego dodatkowego bitu niezależnie od długości słowa. Ma jednak dwie wady. Po pierwsze, zmiana na przykład dwóch bitów pozostaje nie zauważona. Po drugie, błąd jest tylko sygnalizowany, natomiast nie ma możliwości poprawienia go. Sposób ten nadaje się więc głównie dla mniejszych komputerów.

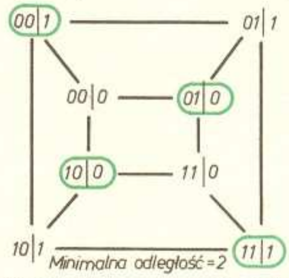
Do zastosowań profesjonalnych używa się zazwyczaj kodu, który pozwala nie tylko wykrywać, ale także poprawiać błędy w przypadku, gdy jeden i tylko jeden bit w słowie uległ przekłamaniu. Oczywiście trzeba do tego więcej bitów. Przypuśćmy, że do ośmiobitowego słowa dodamy cztery bity kontrolne, z których każdy jest ustawiony w zależności od liczby jedynek w grupie połączonej z nim.



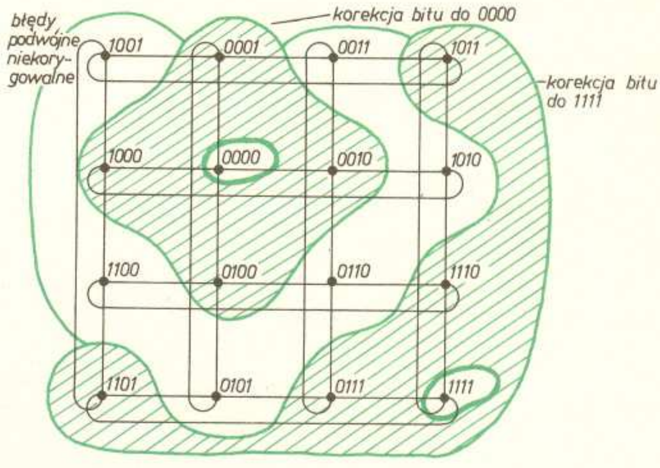
Sprawdźcie, że zmiana każdego pojedynczego bitu spowoduje powstanie błędu parzystości innego zestawu bitów kontrolnych. Wiadomo więc od razu, który bit jest błędny. Błąd parzystości jednego bitu kontrolnego, gdy na dodatek jest to jedyny błąd, oznacza, że przekłamany jest ... ten właśnie bit.

Przy zapisywaniu informacji na dyskach magnetycznych i przy jej przesyłaniu na duże odległości stosuje się jeszcze mocniejsze kody, pozwalające odtworzyć poprawną informację nawet w przypadku błędu kilkudziesięciu bitów w bloku o długości kilku tysięcy bitów.

Przypuśćmy, że zdefiniujemy odległość między dwoma słowami jako minimalną liczbę bitów, które trzeba zmienić w jednym słowie, aby otrzymać drugie. Jeśli odległość między każdymi dwoma słowami zapisanymi do pamięci wynosi co najmniej 2, to zmiana pojedynczego bitu zawsze zostanie wykryta.



Jeśli ta odległość wynosi co najmniej 3, to każda zmiana pojedynczego bitu może zostać skorygowana, a jeśli 4, to dodatkowo każda zmiana dwóch bitów zostanie wykryta (dlaczego?).



minimalna odległość = 4

Skonstruowanie kodu odpornego na zakłócenia polega na takim dobraniu bitów kontrolnych, aby dopisanie tych bitów do zapisywanej informacji powodowało powstanie słów możliwie jak najbardziej oddalonych od siebie. Nie jest to zadanie łatwe, gdy słowa mają po kilka tysięcy bitów, a więc liczba możliwych słów jest niewyobrażalnie wielka. Do projektowania kodów trzeba wówczas korzystać z komputerów ...

mgr Jarosław DEMINET

Rozwiązanie zadania M 499. Przyjmijmy $f(t) = at^2+bt+c$. Wtedy $|f(s)-f(t)| = |a(s^2-t^2)+b(s-t)| = |a(s+t)+b|\,|s-t|$. Ponadto

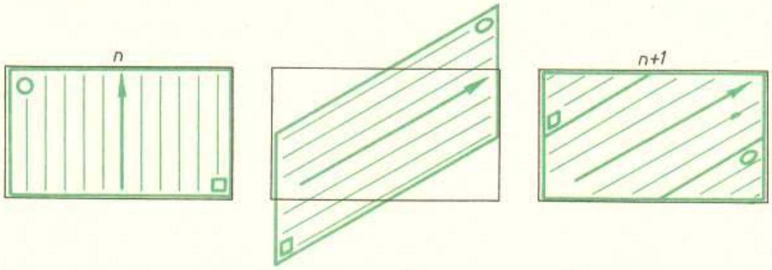
$$\left|f(x)-f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|\frac{ap^2+bpq+cq^2}{q^2}\right| \geq \frac{1}{q^2},$$

ponieważ licznik ostatniego ułamka jest liczbą całkowitą różną od zera. Mamy więc

$$\frac{1}{q^2} \leq \left|a\left(x+\frac{p}{q}\right)+b\right|\left|x-\frac{p}{q}\right|,$$

skąd wynika żądana nierówność.

W roku 1890 Henri Poincaré sformułował następujące twierdzenie o powrocie: Każdy izolowany układ bardzo wielu cząstek powraca w toku mechanicznej ewolucji dowolnie blisko stanu, od którego ewolucja się rozpoczęła. Dla układów makroskopowych ($\sim 10^{23}$ cząstek) czas, po którym to następuje, jest rzędu $10^{10^{23}}$ lat.
Trudno, rzecz jasna, czekać tak długo, warto jednak przekonać się, jak bardzo nieregularne „mieszanie" fragmentów obrazu, (np. według poniższego przepisu)



prowadzi już po niewielkiej liczbie przekształceń do odtworzenia obrazu początkowego. Na zewnętrznej stronie okładki przedstawiamy to w skrócie dla podobizny Poincarégo.