Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 153 /WT=1,51/ i 154 /WT=2,52/ z numeru 8/1987

Marcin Mazur	- Białystok	47,59pkt
Piotr Kumor	- Olsztyn	47,51pkt
Jan Ciach	-Ostrowiec S	44,17pkt
Mirosław Mikucki	- Augustów	42,68pkt
Pietr Wach	- Katowice	41,35pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	41,15pkt
Tadeusz Józefczyk	- Poznań	41,10pkt
Krzysztof Jedziniak	- Katowice	39,85pkt

Sumę 44 punktów przekraczają: pan Mazur po raz trzeci /ósmy Weteran Klubu 44/, pan Kumor po raz pierwszy i pan Ciach po raz drugi.

Zadania z matematyki nr 165, 166

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

165. Funkcja f o wartościach rzeczywistych, określona i różniczkowalna w zbiorze liczb dodatnich, spełnia warunek: $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

166. W przestrzeni trójwymiarowej z ustalonym kartezjańskim układem współrzędnych rozpatrujemy zbiór punktów kratowych, tj. punktów, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi. Niech K będzie sześcianem jednostkowym o wierzchołkach w punktach kratowych i niech będzie dany dowolny punkt kratowy P. Udowodnić, że spośród ośmiu odległości punktu P od wierzchołków sześcianu K co najmniej cztery są liczbami niewymiernymi.

Zadanie **166** zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1987

Przypominamy treść zadań:

157. Wielokąt W ma pole S i obwód d. Dowieść, że W zawiera koło o promieniu $> S/d$.

158. Dane liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $\sum x_i = 0$. Dowieść, że $\sum x_i^2 \leqslant -nx_1x_n$ i ustalić, kiedy zachodzi równość.

158. Liczby x_1 i x_n są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $f(t) = t^2-(x_1+x_n)t+x_1x_n$. Zatem $f(t) < 0$ dla $t \in (x_1; x_n)$, a stąd $0 \geqslant f(x_1)+\ldots+f(x_n) = \sum x_i^2-(x_1+x_n)\sum x_i+nx_1x_n = \sum x_i^2+nx_1x_n$, przy czym nierówność jest ostra, jeśli choć jedna z liczb x_i należy do przedziału otwartego $(x_1; x_n)$. Innymi słowy: nierówność przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_k$, $x_{k+1} = \ldots = x_n$ dla pewnego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

157. Przypuśćmy, że nie istnieje koło o promieniu r zawarte w W. Wówczas każdy punkt wielokąta W jest odległy nie więcej niż o r od brzegu. To znaczy, że jeśli weźmiemy paski szerokości r wzdłuż każdego boku, to one (w zasadzie) pokryją W. Problem pojawia się przy wierzchołkach, gdzie trzeba dokonać staranniejszej kalkulacji. Mianowicie, jeśli mamy bok od A do B, budujemy nie pasek, ale zbiór punktów odległych o $\leqslant r$ od $\overline{AB}$ i leżących pomiędzy dwusiecznymi kątów A i B. Pole tego zbioru równa się $r\cdot$(długość $\overline{AB}$)+(dwa przyczynki przy końcach). Jeśli kąt przy wierzchołku (np. A) jest $<\pi$, musimy odjąć trójkąt prostokątny o wysokości r i kącie $A/2$; ma on pole większe niż zawarty w nim wycinek koła o polu $(r^2/4)(\pi-A)$. Jeśli kąt przy wierzchołku (np. B) jest $\geqslant \pi$, musimy dodać wycinek koła o rozwartości kątowej $(B-\pi)/2$, o polu $(r^2/4)(B-\pi)$. Łącznie więc, pełna powierzchnia tych zbiorów jest ograniczona przez $r\cdot$obwód$-(r^2/2)$(suma kątów zewnętrznych) $= r\cdot$obwód$-\pi r^2$, a ponieważ z założenia suma tych zbiorów zawiera cały wielokąt, widzimy, że pole $\leqslant r\cdot$obwód$-\pi r^2$. Skoro to jest prawda dla wszystkich r przekraczających maksymalny promień koła wpisanego, zatem S/d jest dolnym ograniczeniem długości tego promienia.

Czytelnicy zapewne zauważyli, że podane tu rozwiązanie zadania **157** różni się stylem i charakterem od większości prezentowanych w lidze rozwiązań. Być może, zauważyli też, że jest ono w ogóle niepoprawne. Zadanie to zostało zaczerpnięte z pewnego amerykańskiego zbioru zadań. Znajduje się ono tam wraz z rozwiązaniem, którego dosłownym tłumaczeniem jest przytoczony tekst. O tym, że zawiera ono istotny błąd (niedokładność? lukę?) przekonaliśmy się dopiero przy opracowywaniu rozwiązań do naszego numeru, gdy temu rzeczywiście sugestywnemu rozumowaniu próbowaliśmy nadać bardziej precyzyjną formę. Uznaliśmy jednak, że warto to „firmowe" rozwiązanie pokazać Czytelnikom, zachęcając ich do przyjrzenia się możliwym sytuacjom, wykrycia luki i do próby znalezienia poprawnego rozwiązania. Dowód, który nam się udało dopracować (zresztą oparty generalnie na tym samym pomyśle „brania pasków wzdłuż boków") jest — nie będziemy tego ukrywać — dość zawiły. Przedstawimy go Czytelnikom w odrębnym artykule w drugiej połowie roku.
Może uda się komuś z Czytelników znaleźć rozwiązanie niezbyt skomplikowane, a przy tym bezbłędne. Prosimy wówczas o przysłanie; oczywiście już nie w ramach konkursu ligowego (zresztą, w chwili, gdy piszemy te słowa, nie wiemy jeszcze, co znajduje się w korespondencji od uczestników ligi). Jeśli przysłane rozwiązanie okaże się istotnie prostsze czy nawet tylko istotnie różne od znalezionego przez nas, chętnie je wydrukujemy. Problem wydaje nam się na tyle ciekawy, że warto do niego powracać.

Przy redakcji "Delty" powstał ZERO KOPRU, czyli Zespół Rozpowszechniania Konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją "Delty" w celu uzgodnienia szczegółów wizyty. Liczymy na to, że uda nam się zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze - pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w "Delcie" 2/1987, ukaże się także w "Delcie" 2/1988.

Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.