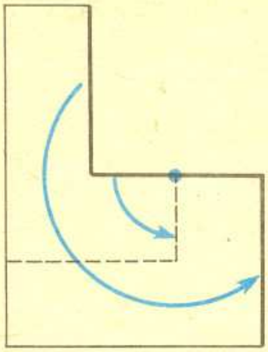
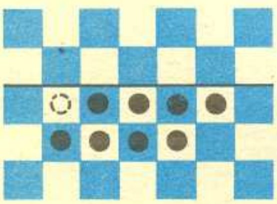
Rozwiązanie zadania z *Małej Delty*.

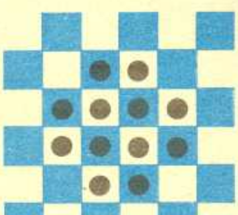


Rozwiązanie zadania M 496. Rozpatrzmy dwie dowolne dziury. Zbiór punktów przestrzeni równo odległych od środków obu dziur jest płaszczyzną; punkty, położone bliżej jednej z dziur, tworzą półprzestrzeń, która jest zbiorem wypukłym. Wielościan, zawierający daną dziurę, jest zbiorem punktów, których odległości od środka danej dziury są mniejsze niż od środków pozostałych dziur. Taki wielościan jest wypukły, ponieważ jest częścią wspólną zbiorów wypukłych (półprzestrzeni).

Rozwiązanie zadania M 498. Przypuśćmy, że pionków jest skończenie wiele i rozpatrzmy najwyższy wiersz szachownicy, w którym jeszcze są pionki. Ostatni pionek z lewej strony musi mieć co najmniej pięciu sąsiadów — wtedy jednak ma sąsiada z lewej — sprzeczność.



Łatwo zobaczyć, że liczby 5 w sformułowaniu zadania nie da się zastąpić przez mniejszą.



O pewnym hokus-pokus w kombinatoryce

Dr Jerzy RUTKOWSKI

Jednym z działów kombinatoryki jest teoria tożsamości kombinatorycznych, czyli takich tożsamości, w których występują symbole Newtona $\binom{n}{k}$. Do tożsamości kombinatorycznych należą np. równości

$$(1)\qquad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}\qquad (n\in \mathbf{N},\ k\in \mathbf{N}\cup\{0\}),$$

$$(2)\qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}\qquad (n\in \mathbf{N}\cup\{0\}).$$

Teoria tożsamości kombinatorycznych jest bogata w metody i wyniki (utworzona przez matematyka amerykańskiego Goulda lista najważniejszych tożsamości kombinatorycznych zawiera ich 500). Z tożsamości kombinatorycznych korzysta się w rachunku prawdopodobieństwa, teorii grafów, algebrze abstrakcyjnej, analizie matematycznej i w innych działach matematyki.

Przypomnijmy, że jeśli $x\in \mathbf{N}$, to

$$\binom{x}{k}=\begin{cases}\dfrac{x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}, & \text{jeśli } k\in \mathbf{N},\\ 1, & \text{jeśli } k=0.\end{cases}$$

Powyższe określenie wartości symbolu Newtona ma sens dla dowolnej (niekoniecznie naturalnej!) liczby rzeczywistej x. Służy więc ono za definicję wartości $\binom{x}{k}$ dla dowolnych $x\in \mathbf{R}$, $k\in \mathbf{N}\cup\{0\}$. Jako łatwe ćwiczenie polecam Czytelnikowi sprawdzenie, że

$$\binom{-3}{4}=15,\quad \binom{-1/2}{3}=-\frac{5}{16},\quad \binom{\sqrt{7}+1}{3}=\sqrt{7},\quad \binom{4}{5}=0,$$

$$\binom{-1}{k}=(-1)^k,\quad \binom{-k}{k}=(-1)^k\binom{2k-1}{k}\quad (k\in \mathbf{N}\cup\{0\}).$$

Przyporządkowanie dowolnej liczbie $x\in \mathbf{R}$ przy ustalonym $k\in \mathbf{N}\cup\{0\}$ wartości $\binom{x}{k}$ jest funkcją. Oczywiście funkcja $\binom{x}{k}$ jest wielomianem stopnia k. Np.

$$\binom{x}{0}=1,\quad \binom{x}{1}=x,\quad \binom{x}{2}=\frac{1}{2}(x^2-x),\quad \binom{x}{3}=\frac{x(x-1)(x-2)}{1\cdot 2\cdot 3}=\frac{1}{6}(x^3-3x^2+2x).$$

Również dla tak ogólnych symboli Newtona słuszne są pewne tożsamości. Dla przykładu sprawdzimy, że

$$(3)\qquad \binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\binom{x+1}{k+1}\qquad (x\in \mathbf{R},\ k\in \mathbf{N}\cup\{0\})$$

(porównaj tę tożsamość z (1)). Jeśli $k=0$, to (3) redukuje się do równości $1+x=x+1$. Jeśli zaś $k\in \mathbf{N}$, to

$$\binom{x}{k}+\binom{x}{k+1}=\binom{x}{k}+\binom{x}{k}\frac{x-k}{k+1}=\binom{x}{k}\frac{x+1}{k+1}=\binom{x+1}{k+1}.$$

A oto dalsze przykłady:

$$(4)\qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k}=\binom{x+n}{n}-1\qquad (n\in \mathbf{N},\ x\in \mathbf{R}),$$

$$(5)\qquad \sum_{k=1}^{n}\binom{x+k}{k}=\binom{x+n+1}{n}-1\qquad (n\in \mathbf{N},\ x\in \mathbf{R}).$$

Przejdźmy wreszcie do naszego hokus-pokus. Otóż zaklęcie h („h" jak hokus-pokus) przemienia w ściśle określony sposób wielomiany w liczby. Jeśli w jest wielomianem, to $h(w)$ jest jego współczynnikiem przy zmiennej w pierwszej potędze, czyli jeśli $w(x)=c_0+c_1x+\ldots+c_nx^n$, to $h(w)=c_1$.

Zaklęcie to ma bardzo pożądaną własność — jest ono liniowe. Oznacza to, że dla dowolnych liczb $b_1,\ldots,b_n$ i dowolnych wielomianów $w_1,\ldots,w_n$ zachodzi równość

$$h(b_1\cdot w_1+\ldots+b_n\cdot w_n)=b_1\cdot h(w_1)+\ldots+b_n\cdot h(w_n).$$

FIZYCZNE NOWINKI

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

CO NOWEGO W KWAZIKRYSZTAŁACH ?

Kwazikryształy są to kryształy o "niedozwolonej" przez prawa klasycznej krystalografii symetrii. Jako pierwsze odkryto kwazikryształy o symetrii pięciokrotnej zbudowane z 14% manganu i 86% aluminium (patrz artykuł w Delcie nr 8 z 1986 r.), a później z innych stopów metali przejściowych. W 1985 roku Leonid Benderski z Uniwersytetu w Baltimore (Maryland, USA) wykonał serię badań stopów manganu i glinu za pomocą mikroskopu elektronowego o wysokiej zdolności rozdzielczej. Udowodnił on, iż ze wzrostem koncentracji manganu kwazikryształy o symetrii pięciokrotnej "przechodzą" w kwazikryształy o osi dziesięciokrotnej. Następnie mieszana grupa z Politechniki w Zurychu (Szwajcaria) i Uniwersytetu w Nagoja (Japonia) znalazła badając stopy niklu i chromu pewne dowody na istnienie kwazikryształów o symetrii dwunastokrotnej. Z kolei do badań włączyli się uczeni z Laboratorium Mikroskopii Elektronowej Chińskiej Akademii Nauk w Pekinie, którzy najpierw potwierdzili fakt istnienia kwazikryształów o symetrii dziesięciokrotnej. Ostatnio zaś ogłosili o odkryciu kolejnego, nowego gatunku kwazikryształów o symetrii ośmiokrotnej. (Warto dodać, ze możliwość istnienia takich kwazikryształów była w 1986 roku postulowana w pracach teoretycznych.) Są to znów stopy metali przejściowych o składach $Cr_2Ni_3Si_2$ oraz $V_{15}Ni_{10}Si$. Otrzymywano je w postaci cienkich warstw przez gwałtowne schładzanie rozpylonych metali i krzemu. Następnie próbki były badane przy użyciu dyfrakcji elektronów oraz mikroskopu elektronowego o wysokiej zdolności rozdzielczej (około 0.25 nm). Otrzymane widma dyfrakcyjne wykazują bardzo wyraźnie symetrię ośmiokrotną. Tzn. są identyczne po obrocie o kąt 2π/8 czyli 45°. Z kolei obrazy otrzymane w transmisyjnym mikroskopie elektronowym wykazują brak symetrii periodycznej, co jest wspólną cechą wszystkich kwazikryształów. Obrazy te mogą być natomiast symulowane za pomocą nieperiodycznej sieci otrzymanej z kwadratów oraz rombów o identycznym jak kwadraty boku i kącie 45°. Łatwo narysować sobie taką sieć i przekonać się, że istnieją w niej punkty o symetrii ośmiokrotnej. Obecnie jedynie sławny chemik i krystalograf, laureat nagrody Nobla, Linus Pauling w dalszym ciągu konsekwentnie twierdzi, że kwazikryształy nie istnieją i usiłuje wyjaśnić istniejące dane eksperymentalne przez występowanie w nich tzw. wielokrotnych zbliźniaczeń. Natomiast większość krystalografów i fizyków ciała stałego przekonana dużą ilością faktów eksperymentalnych, jak i analiz teoretycznych "pogodziła się" z faktem realnego istnienia kwazikryształów. Zapewnie więc w nowych podręcznikach z fizyki kwazikryształy znajdą należne sobie miejsce.

Fakt ten wynika wprost z definicji h oraz z określenia odpowiednich działań.

Istotną rolę w naszych czarach odgrywać będzie następujące

Twierdzenie. Niech a będzie dowolną liczbą rzeczywistą i niech $k \in \mathrm{N}$. Wtedy

$$h\left(\binom{x+a}{k}\right) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{a+k+1}}{k\dbinom{k-1}{a}}, & \text{jeśli } a \in \{0, 1, \ldots, k-1\} \\ \dbinom{a}{k}\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} \frac{1}{a-j}, & \text{jeśli } a \notin \{0, 1, \ldots, k-1\}. \end{cases}$$

A oto dowód. Z definicji symbolu Newtona mamy

$$\binom{x+a}{k} = \frac{1}{k!}[x+a]\cdot[x+(a-1)]\cdot\ldots\cdot[x+(a-k+1)].$$

Zauważmy, że po wykonaniu mnożeń w iloczynie dwumianów $(x+a_1)\cdot(x+a_2)\cdot\ldots\cdot(x+a_k)$ otrzymamy wielomian, którego współczynnik przy x jest sumą k iloczynów postaci $a_1\cdot\ldots\cdot a_{j-1}\cdot a_{j+1}\cdot\ldots\cdot a_k$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$ — niech Czytelnik sprawdzi to dla $k = 2, 3$ i 4.

Rozważmy teraz dwa przypadki:

Przypadek I — któraś z liczb $a_1, \ldots, a_k$, np. a_l, jest zerem. Wtedy wszystkie iloczyny zawierające czynnik a_l są równe 0 i współczynnik przy x redukuje się do jednego iloczynu $a_1\cdot\ldots\cdot a_{l-1}\cdot a_{l+1}\cdot\ldots\cdot a_k$. W szczególności dla rozważanego przez nas wielomianu $\binom{x+a}{k}$, przy założeniu, że $a \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ mamy

$$c_1 = \frac{1}{k!}a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1\cdot(-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1) = \frac{1}{k!}a!\cdot(k-a-1)!\cdot(-1)^{a-k+1} = $$
$$= \frac{(-1)^{a+k+1}}{k\dbinom{k-1}{a}}.$$

Przypadek II — każda z liczb $a_1, \ldots, a_k$ jest różna od 0. Wspomnianą wyżej sumę iloczynów możemy w tym przypadku przekształcić następująco

$$\sum_{j=1}^{k} a_1\cdot\ldots\cdot a_{j-1}\cdot a_{j+1}\cdot\ldots\cdot a_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{a_1\cdot\ldots\cdot a_{j-1}\cdot a_j\cdot a_{j+1}\cdot\ldots\cdot a_k}{a_j} = a_1\cdot\ldots\cdot a_k\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{a_j}.$$

Stąd dla naszego wielomianu $\binom{x+a}{k}$ mamy

$$c_1 = \frac{1}{k!}a\cdot(a-1)\cdot\ldots\cdot(a-k+1)\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{a-j} = \binom{a}{k}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{a-j}.$$

To kończy dowód naszego twierdzenia.

Z twierdzenia tego widać, że zaklęcie h przemienia każdorazowo wyrażenie kombinatoryczne $\binom{x+a}{k}$ w wyrażenie również kombinatoryczne. Teraz, gdy jesteśmy już wtajemniczeni w działanie zaklęcia h, możemy przystąpić do robienia sztuczek. Weźmy jako rekwizyt tożsamość (4). Zaklinając lewą stronę równości (4) otrzymujemy

$$h\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}h\left(\binom{x}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k\dbinom{k-1}{0}} = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k},$$

a zaklinając stronę prawą (4) dostajemy

$$h\left(\binom{x+n}{n}-1\right) = h\left(\binom{x+n}{n}\right) - h(1) = \binom{n}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{n-1} - 0 = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

W efekcie otrzymaliśmy następującą, zupełnie niepodobną do (4) tożsamość kombinatoryczną:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad (n \in \mathrm{N}).$$

Jeśli w równości (4) podstawimy $x-1$ w miejsce x (wszak (4) jest równością wielomianów), to otrzymamy następującą tożsamość wyjściową

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\binom{x-1}{k} = \binom{x+n-1}{n} - 1.$$

Czyniąc teraz hokus-pokus, otrzymujemy tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k+1}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=\frac{1}{n}\qquad(n\in\mathbf{N})$$

(szczegóły pozostawiam Czytelnikowi).
Czytelnik może też sprawdzić, że z (5) można wyczarować tożsamość

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}=(n+1)\sum_{j=2}^{n+1}\frac{1}{j}\qquad(n\in\mathbf{N}).$$

Np. dla $n = 4$ zachodzi równość

$$1+\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)=5\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right).$$

Takich zastosowań funkcji h (bo czymże jest h, jak nie funkcją?) jak te powyższe można wskazać jeszcze wiele.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 496. Udowodnić, że prostopadłościenny ser szwajcarski można rozciąć na wielościany wypukłe w taki sposób, by w każdym z nich znalazła się dokładnie jedna dziura (dziury są kuliste).
Rozwiązanie na str. 10

M 497. Niech $x > 0$ będzie liczbą niewymierną. Udowodnić, że między każdą parą kolejnych liczb naturalnych znajduje się dokładnie jeden wyraz jednego z ciągów

$$1+x,\quad 2(1+x),\quad 3(1+x),\ \ldots$$

$$1+\frac{1}{x},\quad 2\left(1+\frac{1}{x}\right),\quad 3\left(1+\frac{1}{x}\right),\ \ldots$$

Rozwiązanie na str. 14

M 498. Na nieskończonej szachownicy ustawiono pionki w taki sposób, że każdy ma co najmniej pięciu sąsiadów (przyjmujemy, że każde pole ma osiem pól sąsiednich). Udowodnić, że pionków jest nieskończenie wiele.

(Włodzimierz Smoleński)

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 238. Między dwa polaryzatory P i P' (patrz rysunek), których osie (kierunki polaryzacji światła przepuszczanego przez pryzmaty) tworzą kąt 45°, wstawiona jest rurka o długości $l = 0{,}5$ m wypełniona dwusiarczkiem węgla CS_2. Zewnętrzne pole magnetyczne o indukcji $\boldsymbol{B}$ skierowane jest równolegle do osi rurki. Jakie powinny być zwrot i wartość wektora $\boldsymbol{B}$, aby jak największy strumień światła docierał z punktu S do punktu O? Co się stanie, gdy zamienimy położenia źródła światła S i punktu obserwacji O bez zmiany pozostałych elementów układu? Stała opisująca zależność kąta skręcenia płaszczyzny polaryzacji światła w CS_2 od długości drogi światła i natężenia pola magnetycznego (stała Verdeta) wynosi $V = 42' \cdot 10^3\ T^{-1} \cdot m^{-1}$.
Rozwiązanie na str. 17

F 239. Jądro atomu wodoru (proton) i jądro atomu deuteru przyciągają elektron z taką samą siłą. Czy widma obu atomów będą takie same?
Rozwiązanie na str. 14