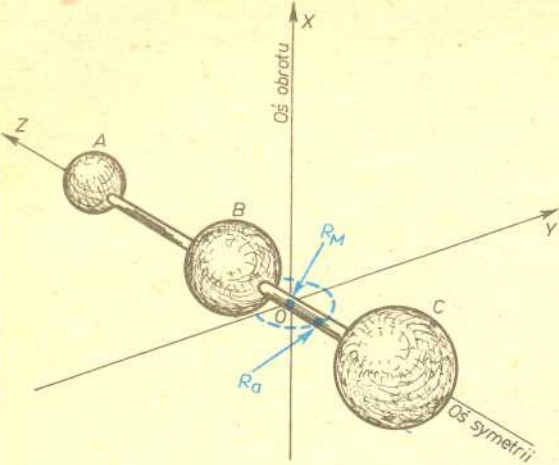


Dr Jacek DOBACZEWSKI  
Dr hab. Witold NAZAREWICZ



Rys. 1. Trzy kulki A, B i C połączone sztywnymi prętami stanowią makroskopowy model molekuly liniowej. Oś symetrii tego układu (oś z na rysunku) jest, oczywiście, jego osią główną. Pozostałe dwie osie główne (x i y) są prostopadłe do osi symetrii i przecinają ją w środku masy  $R_M$ . Jeśli środek ładunku  $R_Q$  układu nie pokrywa się ze środkiem masy, to obrót wokół osi x (jak na rysunku) spowoduje efektywny ruch ładunku wypadkowego po okręgu.

\* Patrz M. Kopernik *O obrotach sfer niebieskich* (pierwsza część ukazała się w ubiegłym roku nakładem Ossolineum).



Wszyscy wiemy, że Ziemia się kręci\*. Wirować mogą też mniejsze ciała, jak na przykład grające bąki, jojo, hula-hoop oraz latające talerze. Czy możemy jednak zaobserwować wirującą molekułę? atom? jądro atomowe? A jakże — możemy. Obroty ciał niewielkich mają jednak swoje cechy szczególne, jakich próżno by szukać w makroświecie. Zapytacie, jakie? Zaraz, zaraz, najpierw przypomnijmy sobie, jak opisuje się obroty ciał „zwykłych”.

Obrót ciała charakteryzują trzy wielkości fizyczne: prędkość kątowna  $\omega$ , moment pędu  $I$  i moment bezwładności  $J$ . Układ współrzędnych możemy zawsze wybrać w taki sposób, aby składowa  $I_x$  momentu pędu zależała tylko od składowej  $x$  prędkości kątowej i aby tak samo było dla składowych  $y$  i  $z$  (układ osi głównych):

$$(1) \quad I_x = J_x \omega_x, \quad I_y = J_y \omega_y, \quad I_z = J_z \omega_z.$$

Liczby  $J_x$ ,  $J_y$  i  $J_z$  nazywamy głównymi momentami bezwładności ciała sztywnego. Energię ruchu obrotowego możemy obliczyć ze wzoru:

$$(2a) \quad E_{obr} = \frac{I_x^2}{2J_x} + \frac{I_y^2}{2J_y} + \frac{I_z^2}{2J_z} = \frac{1}{2} J_x \omega_x^2 + \frac{1}{2} J_y \omega_y^2 + \frac{1}{2} J_z \omega_z^2,$$

który w przypadku  $J_x = J_y = J_z = J$  sprowadzi się do

$$(2b) \quad E_{obr} = I^2/2J.$$

Ruch ciała sztywnego — nawet wtedy, gdy nie działają na nie żadne siły — może być bardzo skomplikowany. Pewne wyobrażenie o jego złożoności możemy uzyskać wprawiając w ruch obrotowy podrzucony w rękę przedmiot. Ruch ten wygląda „prosto”, gdy uda nam się wprawić ciało w obrót wokół jednej z jego osi głównych. Wtedy oś obrotu nie zmienia swojego kierunku w przestrzeni, a wektory prędkości kątowej i momentu pędu są równoległe. Jeśli ciało ma trzy różne główne momenty bezwładności  $J_x > J_y > J_z$ , to nie będzie się ono trwale obracać wokół osi o pośrednim momencie bezwładności  $J_y$  — obrotami stabilnymi mogą być tylko obroty wokół osi o najmniejszym i największym momencie bezwładności.

Zajmijmy się teraz ciałami, dla których dwa główne momenty bezwładności są identyczne, a trzeci jest inny (ciała takie nazywa się bąkami symetrycznymi). Przyjmijmy, że  $J_x = J_y > J_z$ . Rysunek 1 przedstawia ciało, które jest bąkiem symetrycznym. Są to trzy kulki A, B i C połączone sztywnym prętem. Ośią główną tego ciała będzie, oczywiście, jego oś symetrii OZ położona wzdłuż pręta oraz dowolne dwie osie prostopadłe leżące w płaszczyźnie prostopadłej do OZ. Początek układu współrzędnych umieściliśmy w środku masy ciała oznaczonym na rysunku przez  $R_M$ . Załóżmy również, że kulki naładowane są ładunkami  $Q_A$ ,  $Q_B$  i  $Q_C$ . Na osi OZ zaznaczyliśmy środek ładunku tego ciała,  $R_Q$ .

Mógłby się ktoś zapytać, po co „komplikować” nasz przykład przez dodanie ładunków elektrycznych. Jakie to ma znaczenie?

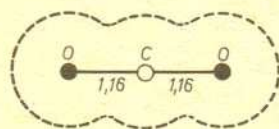
Jak wiadomo, ładunek elektryczny (lub układ ładunków) poruszający się z przyspieszeniem wysyła falę elektromagnetyczną. Częstotliwość tej fali zależy od ruchu ładunku, natomiast rozkład kątowny promieniowania określony jest przez rozkład przestrzenny ładunków źródłowych. Najprostszym przykładem jest promieniowanie dipolowe wysyłane przez ładunek drgający wzdłuż prostej lub przez elektrony w antenie (dipol elektryczny). Skomplikowany układ ładunków może wysyłać promieniowanie o bardzo złożonym charakterze (kwadrupolowe, oktapolowe i in.). Jeśli obracające się ciało jest naładowane, będzie, oczywiście, emitowało falę elektromagnetyczną, gdyż ładunki elektryczne znajdujące się w ciele poruszają się z przyspieszeniem. Z promieniowaniem związana jest energia pola elektromagnetycznego, która wysyłana jest w przestrzeń. Zgodnie z zasadą zachowania energii ciało będzie stopniowo traciło energię ruchu obrotowego, będzie hamowane przez promieniowanie. W tym miejscu bystry Czytelnik może zadać pytanie: a co się stanie z momentem



**Rozwiązanie zadania M 497.** Część całkowitą liczby  $a$  będziemy oznaczać przez  $[a]$ . Zauważmy, że żaden z wyrazów obu ciągów nie jest liczbą całkowitą. Niech  $n$  będzie liczbą naturalną. Jest  $[n/(1+x)]$  wyrazów pierwszego ciągu mniejszych od  $n$  i  $[n/(1+\frac{1}{x})]$  wyrazów drugiego ciągu mniejszych od  $n$ . Jednakże

$$\frac{n}{1+x} + \frac{n}{1+\frac{1}{x}} = \frac{n}{1+x} + \frac{nx}{1+x} = n.$$

Liczby  $n/(1+x)$  i  $n/(1+\frac{1}{x})$  mają nierówne części ułamkowe, których suma na mocy powyższej równości wynosi  $1$ . Zatem  $[n/(1+x)] + [n/(1+\frac{1}{x})] = n-1$ , czyli jest  $n-1$  wyrazów obu ciągów mniejszych od  $n$  i  $n$  wyrazów mniejszych od  $n+1$ , co kończy dowód.



Rys. 2. Molekuła dwutlenku węgla  $\text{CO}_2$ . Odległości między jądrami podane są na rysunku w angstromach. Linia przerywana zaznaczono schematycznie rozmiar obszaru zajmowanego przez elektrony molekuł. Małe kulki reprezentujące jądra atomowe są, oczywiście, na rysunku dużo za duże.



**Rozwiązanie zadania F 239.** Atom deuteru ma jądro dwa razy cięższe od jądra atomu wodoru. Jeśli przyjmijemy, że elektron porusza się wokół nieruchomego jądra, to oba widma powinny być identyczne. W rzeczywistości elektron i jądro poruszają się wokół wspólnego środka masy. Poziomy energetyczne takiego układu są identyczne z poziomami energetycznymi ciała o ładunku równym ładunkowi elektronu  $e$  i masy

$$\mu = \frac{Mm}{M+m},$$

gdzie  $M$  — masa jądra,  $m$  — masa elektronu. Energia fotonu wypromieniowanego przy przejściu ze stanu opisanego liczbą kwantową  $n_1$  do stanu  $n_2$  ( $n_1 > n_2$ ) wynosi

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\mu e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right),$$

gdzie  $\epsilon_0$  — przenikalność dielektryczna próżni,  $h$  — stała Plancka. Widma obu atomów będą więc różne.

pędu? Przecież jeśli na ciało nie działa zewnętrzny moment sił, moment pędu bąka nie powinien ulec zmianie. Nie uwzględniliśmy jednak tego, że z falą elektromagnetyczną też związany jest moment pędu. A zatem wysyłane promieniowanie zabiera zarówno energię, jak i moment pędu bąka. I nie ma paradoksu.

Wróćmy teraz do przykładu z rysunku 1. Wprawmy nasze ciało w obrót wokół osi  $OX$  i spójrzmy na nie z kierunku wyznaczonego przez oś  $OY$ . Co widzimy? Oto wokół pewnego nieruchomego punktu w przestrzeni ( $R_M$ ) drga punkt  $R_Q$ , w którym jest umieszczony wypadkowy ładunek  $Q = Q_A + Q_B + Q_C$ . Jaki efekt musi się pojawić? Oczywiście, układ będzie emitował promieniowanie elektromagnetyczne. Ponieważ promieniowanie to pochodzi od obracającego się dipola elektrycznego, będzie to promieniowanie dipolowe. Rozpatrzmy teraz sytuację, gdy masy, ładunki i odległości między nimi są takie, że środek masy i środek ładunku znajdują się w tym samym punkcie. Teraz nie ma już wirującego dipola elektrycznego. Układ wygląda raz jak ładunek skupiony blisko punktu  $R_Q = R_M$  (wtedy, gdy pręt ustawiony jest w naszym kierunku), a raz jak ładunek rozłożony po obu stronach tego punktu (wtedy, gdy pręt jest ustawiony prostopadle do kierunku, z którego patrzymy). Wygląda to zupełnie jak pulsowanie ładunku na boki i do środka. Taki zmienny rozkład ładunku będzie również źródłem fali elektromagnetycznej — będzie emitował tzw. promieniowanie kwadrupolowe.

Przejdźmy teraz do świata drobin i molekuł. Są one układami atomów związanych siłami elektromagnetycznymi, które utrzymują atomy składowe w określonych wzajemnych odległościach. Dla przykładu rozważmy cząsteczkę dwutlenku węgla  $\text{CO}_2$ . Ma ona budowę liniową, przy czym atom węgla znajduje się między atomami tlenu i w stanie równowagi położony jest dokładnie w środku masy cząsteczki (rys. 2). Ze względu na symetrię układu moment dipolowy tej cząsteczki jest w stanie równowagi dokładnie równy zeru. Odległości między atomami tlenu a atomem węgla wynoszą  $1,16 \text{ \AA}$  ( $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ m}$ ), są więc małe i do rozważanego układu trzeba stosować prawa mechaniki kwantowej opisującej układy mikroskopowe. Okazuje się, że energia ruchu obrotowego kwantowego bąka wyraża się wzorem podobnym do wzoru (2b). Jedyna różnica polega na tym, że moment pędu układu mikroskopowego jest skwantowany, czyli może przyjmować tylko pewne szczególne wartości:

$$(3) \quad I^2 \rightarrow I_{kw}^2 = I(I+1) \hbar^2 \quad \text{dla } I = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

gdzie  $\hbar$  jest stałą Plancka ( $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ ), natomiast liczbę całkowitą  $I$  nazywamy liczbą kwantową momentu pędu. Energię obrotową cząsteczki możemy więc przedstawić w następujący sposób:

$$(4) \quad E_{obr}(I) = \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1).$$

Zbiór dyskretnych stanów (poziomów) rotacyjnych tworzy pasmo rotacyjne. Zgodnie ze wzorem (4) różnica energii kolejnych stanów pasma:

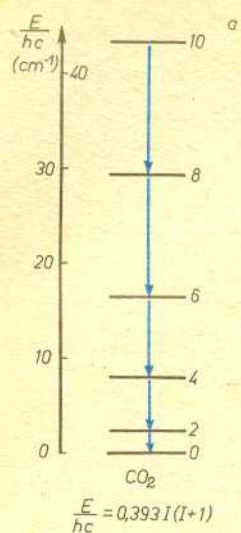
$$(5a) \quad E_{obr}(I) - E_{obr}(I-1) = 2I \frac{\hbar^2}{2J},$$

lub

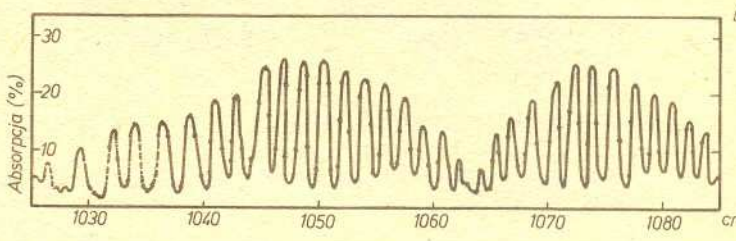
$$(5b) \quad E_{obr}(I) - E_{obr}(I-2) = 2(2I-1) \frac{\hbar^2}{2J},$$

jest liniową funkcją liczby kwantowej momentu pędu  $I$ . Układ kwantowy przechodząc z danego poziomu na poziom niższy emituje kwant promieniowania elektromagnetycznego. Energia tego kwantu musi być dokładnie równa różnicy energii między poziomami, a moment pędu kwantu musi być dokładnie równy różnicy momentów pędu dwu poziomów. W kwantowej teorii pola elektromagnetycznego falę elektromagnetyczną możemy opisać jako zbiór cząstek, fotonów. Foton ma energię  $\hbar\omega$ , pęd  $\hbar\omega/c$  oraz moment pędu, który jest wielokrotnością  $\hbar$ . Najmniejszy moment pędu fotonu równy jest  $\hbar$  i foton taki nazywamy fotonem dipolowym. Fotony o momencie pędu  $2\hbar$  nazywa się fotonami kwadrupolowymi, o momencie pędu  $3\hbar$  — oktopolowymi, itd.

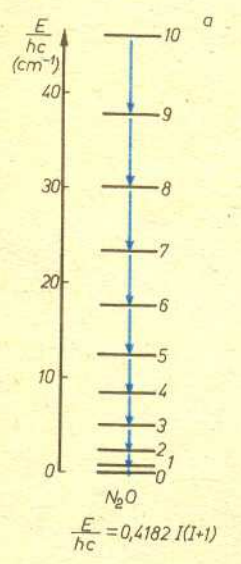
Analizując promieniowanie emitowane z gazowego dwutlenku węgla możemy zaobserwować kwanty o określonych energiach i określonych momentach pędu i z tych obserwacji „ułożyć” całe pasmo rotacyjne. Wyniki takiego pomiaru przedstawione są na rysunku 3a. Jak widzimy, pasmo rotacyjne składa się wyłącznie ze stanów o parzystych momentach pędu. Energie emitowanych kwantów promieniowania przedstawione są na rysunku 3b. Ze znakomitą dokładnością rosną one liniowo wraz ze wzrostem momentu pędu — upewnia nas to o tym, że znaleźliśmy prawdziwe pasmo rotacyjne. Dwutlenek węgla emituje wyłącznie kwanty o momencie pędu  $2\hbar$ . Dlatego momenty pędu stanów w paśmie zmieniają się co 2, a stanów o nieparzystym momencie pędu po prostu nie ma. Przypomnijmy sobie naszą analizę układu kul na precie —



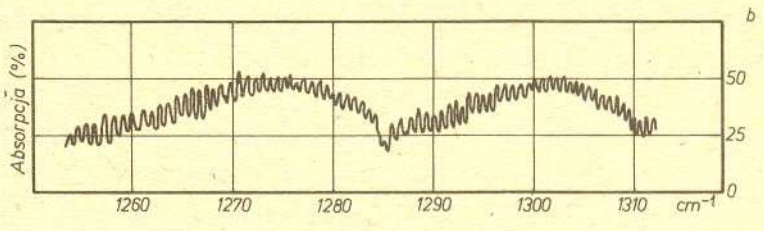
Rys. 3. Pasmo rotacyjne gazowego dwutlenku węgla CO<sub>2</sub> (a) otrzymane z jego widma absorpcyjnego (b).



Cząsteczka CO<sub>2</sub> jest białym krukiem w świecie molekuł — większość z nich ma w równowadze niezerowe momenty dipolowe. Dla przykładu popatrzymy na wyniki pomiaru promieniowania tlenku azotu N<sub>2</sub>O (rysunki 4a i 4b). Pasmo rotacyjne zawiera teraz poziomy o wszystkich liczbach kwantowych  $I$ ; różnice momentów pędu między kolejnymi poziomami są równe 1, a więc każdy z kwantów promieniowania musi unosić moment pędu  $1\hbar$ . Cząsteczki N<sub>2</sub>O emitują więc promieniowanie dipolowe, a zatem mają w równowadze niezerowy moment dipolowy. Jest tak dlatego, że w cząsteczce tlenku azotu atomy azotu są po tej samej stronie atomu tlenu (rys. 5).

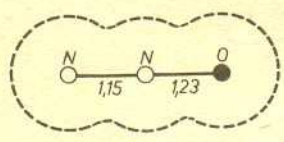


Rys. 4. Pasmo rotacyjne gazowego N<sub>2</sub>O (a), otrzymane z widma absorpcyjnego (b).



Dotychczas mówiliśmy tylko o obrotach wokół osi prostopadłej do osi symetrii. Układ prętów i kul makroskopowych, o jakim mówiliśmy na początku, może się, oczywiście, obracać również i wokół swojej osi symetrii. Można byłoby więc oczekiwać podobnego ruchu w przypadku układu mikroskopowego. Natrafiamy tu jednak na poważny problem związany z niemożnością odróżnienia cząsteczki liniowej od takiej samej cząsteczki obróconej o jakiś kąt wokół osi symetrii. W przypadku układu prętów i kul rozróżnienia takiego możemy dokonać; na przykład stawiając pędzelkiem małą kropeczkę na jednej z kul układu i obserwując jej położenie. Cząsteczki liniowe mają idealną symetrię obrotową i z punktu widzenia mechaniki kwantowej ruch obrotowy wokół ich osi symetrii po prostu nie istnieje. Natomiast każde odstępstwo od liniowości cząsteczki prowadzi do pojawienia się kilku pasm rotacyjnych.

Znając energie emitowanych kwantów i wartość stałej Plancka możemy wyznaczyć momenty bezwładności rozmaitych molekuł. Dla naszych cząsteczek CO<sub>2</sub> i N<sub>2</sub>O wynoszą one odpowiednio  $0,72 \cdot 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  oraz  $0,67 \cdot 10^{-45} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ , a więc są bardzo małe. Nie oznacza to jednak, że cząsteczki obracają się wolno! Aby przy tak małym momencie bezwładności móc zmagazynować „aż” jednostkę  $\hbar$  momentu pędu, muszą one wykonywać około  $10^{10}$  obrotów na sekundę, co przy ich małych rozmiarach wymaga, by skrajne atomy poruszały się z całkiem sporą prędkością kilkunasu metrów na sekundę. Z jeszcze większymi prędkościami kątowymi wirują jądra atomowe!



Rys. 5. Molekuła tlenku azotu.

## Czytelnicy piszą

75812394  
-49321857  
26490537  
+73509462  
99999999

Rozważmy następujące zadanie: od danej liczby parzystocyfrowej, której pierwsza cyfra jest większa od ostatniej, odejmijmy liczbę powstałą z wyściowej przez zapisanie jej cyfr w odwrotnym porządku. Do otrzymanej w ten sposób liczby dodajmy liczbę z niej powstałą znów przez zapisanie jej cyfr w odwrotnym porządku (jeśli różnica miała mniej cyfr niż liczba, z której startowaliśmy, to dopisujemy jej na początku 0 i dopiero „odwracamy”). Okazuje się, że jeśli zaczynaliśmy od liczby  $2n$ -cyfrowej, to w  $45^n$  przypadkach nasze postępowanie da w wyniku liczbę  $2n$ -cyfrową składającą się z samych dziewiątek. Wynik taki otrzymamy, jeżeli tylko liczba, od której rozpoczęliśmy, spełnia następujące warunki ( $a_i$  oznacza  $i$ -tą od końca cyfrę danej liczby)

$$a_{2n} > a_1, a_{2n-1} < a_2, a_{2n-2} > a_3, \dots, a_{n+1} > a_n, \text{ jeśli } n \text{ nieparzyste,}$$

$$\text{a } a_{n+1} < a_n, \text{ gdy } n \text{ parzyste.}$$

Jeśli zaś liczba nie spełnia powyższych warunków, to opisane postępowanie prowadzi do liczby, w której zapisie nie występują cyfry 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Wynik ten wraz z dowodem przekazał nam pan Tadeusz Boncler. Sądźmy, że publikowanie dowodu zepsułoby Czytelnikom przyjemność, jaką będzie przeprowadzenie go samodzielnie.