Krzywizna

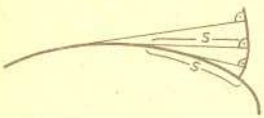
Dr Jerzy KONARSKI

Christian Huygens (1629—1695), uczony holenderski, znany ze swej zasady rozchodzenia się fal. Skonstruował wahadło izochroniczne (tj. takie, którego okres drgań nie zależy od amplitudy). Właśnie do tej konstrukcji były mu potrzebne własności ewolwent.

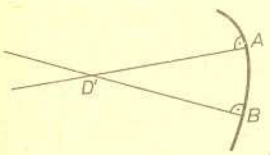
Alexis-Claude Clairaut (1713—1765), matematyk francuski, zajmował się m.in. krzywymi przestrzennymi, powierzchniami obrotowymi (także kształtem Ziemi) i ruchem Księżyca. Pierwszą pracę o krzywych napisał mając 12 lat, książkę o krzywych wspomnianą w tekście obok — cztery lata później, w wieku lat 17 został członkiem Paryskiej Akademii Nauk.

Gaspard Monge (1746—1818), matematyk, fizyk, chemik i inżynier francuski. Za czasów Napoleona minister marynarki, był jednym z założycieli akademii wojskowej École Polytechnique. W matematyce zajmował się geometrią i równaniami różniczkowymi.

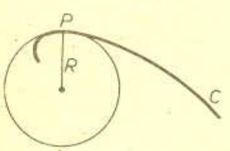
Leonhard Euler (1707—1783), jeden z największych matematyków XVIII wieku. Zajmował się wieloma dziedzinami matematyki.



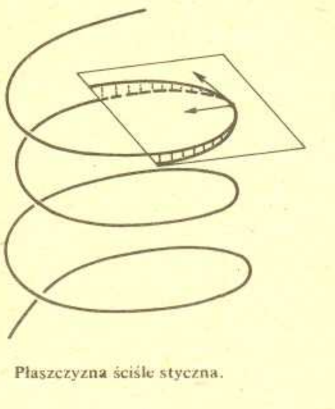
Ewolwenta krzywej.



Huygens wykazał, że jeśli $B \to A$, to D' dąży do pewnej granicy D. Jest to dowód istnienia środka krzywizny.



Okrąg ściśle styczny i promień krzywizny krzywej C w punkcie p.



Płaszczyzna ściśle styczna.

Krzywe o stałej krzywiźnie i stałym skręceniu — to linie śrubowe. Krzywe o zerowym skręceniu to krzywe płaskie.

W języku potocznym termin krzywizna ma, przynajmniej w odniesieniu do linii krzywych, dość jasne znaczenie. W geometrii różniczkowej nazwą tą określa się różne wielkości związane z krzywymi i powierzchniami (a także innymi obiektami geometrycznymi) i mające uogólniać to najprostsze, intuicyjne znaczenie. Omówimy tutaj w skrócie rozwój tych pojęć, zajmujących centralne miejsce w geometrii różniczkowej, ograniczymy się jednak tylko do krzywych i powierzchni.

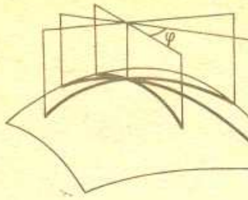
Najpierw zajmiemy się krzywymi płaskimi. Zaczniemy od roku 1673, w którym Christian Huygens opublikował pracę o ewolwentach. Przypomnijmy, że ewolwentą („odwijaną") danej krzywej płaskiej nazywamy krzywą, którą zakreśli „koniec sznurka, pierwotnie przyklejonego wzdłuż danej krzywej, a następnie z niej odrywanego". Można powiedzieć, że rysowanie ewolwenty przypomina kreślenie okręgu, ale ze zmiennym środkiem przesuwającym się wzdłuż danej krzywej i o zmiennym promieniu. W swojej pracy Huygens m.in. udowodnił, że możliwa jest też konstrukcja odwrotna: dla danej krzywej można znaleźć nową krzywą (tzw. ewolutę), której ta pierwsza jest ewolwentą. Znaczy to, że jeśli przez wybrany punkt p na krzywej poprowadzimy do niej prostą prostopadłą, to można na niej znaleźć „środek owego zmieniającego się okręgu" występującego w konstrukcji ewolwenty. Środek i promień tego okręgu nazwano później odpowiednio środkiem i promieniem krzywizny krzywej w punkcie p. Odwrotność długości promienia krzywizny nazywa się krzywizną krzywej w punkcie p, a sam okrąg — okręgiem ściśle stycznym do krzywej w tym punkcie. Ta ostatnia nazwa pochodzi stąd, że jak w kilka lat po Huygensie wykazał Newton, między tym okręgiem a krzywą nie da się „zmieścić" żadnego innego okręgu stycznego. Okrąg ściśle styczny najlepiej ze wszystkich okręgów przybliża krzywą w okolicy danego punktu. Zauważmy, że powyższa definicja krzywizny zgadza się z określeniem potocznym: za krzywiznę okręgu przyjmujemy odwrotność jego promienia (im promień większy, tym krzywizna mniejsza), a za krzywiznę krzywej — krzywiznę okręgu, który ją przybliża.

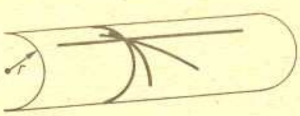
Przejdźmy do krzywych przestrzennych. Pomysł, aby określić dla nich dwie krzywizny, pojawił się po raz pierwszy w książce A. C. Clairaut, jednak proponowana przez niego metoda badania krzywych za pomocą ich rzutów na płaszczyzny rozpięte przez osie układu współrzędnych nie dała dobrych wyników. Krzywiznę krzywej przestrzennej jako pierwsi określili G. Monge i L. Euler w roku 1775. Pierwszy z nich uogólnił geometryczny dowód Huygensa, rozpatrując zamiast prostych prostopadłych — płaszczyzny prostopadłe do krzywej. Drugi zaproponował następujący sposób. Sparametryzował krzywą długością łuku, co umożliwia traktowanie jej jako drogi punktu poruszającego się w przestrzeni ze stałą szybkością (skalarną). To nam daje wektor styczny do krzywej w każdym jej punkcie (jednostkowy, bo szybkość jest stała). Pomysł Eulera polegał na tym, żeby mierzyć krzywiznę szybkością zmian kierunku tego wektora. Ściślej mówiąc, Euler przeniósł ten wektor do początku układu współrzędnych. Koniec tego wektora opisywał zatem pewną nową krzywą, tzw. indykatrysę sferyczną, na sferze jednostkowej. Krzywizna była określona jako stosunek długości króciutkiego odcinka indykatrysy sferycznej do długości odpowiadającego mu łuku danej krzywej.

Krzywa i jej indykatrysa sferyczna. Na łuku między v_1 a v_2 krzywizna jest mała, między v_4 a v_5 — duża.

Drugą krzywiznę, zwaną później skręceniem, wprowadził dopiero uczeń Monge'a, M. Lancret. Gdy poruszamy się po krzywej, wektory styczne w „sąsiednich" punktach (takiej terminologii wówczas używano) wyznaczają tzw. płaszczyznę ściśle styczną. Jeśli np. krzywa jest płaska, to zawierająca ją płaszczyzna jest jednocześnie płaszczyzną ściśle styczną w każdym jej punkcie. Dzisiaj powiedzielibyśmy, że płaszczyzna ta jest rozpięta na wektorze stycznym (wektorze prędkości) i na wektorze przyspieszenia punktu poruszającego się po krzywej. Lancret nazwał kierunek prostopadły do krzywej i leżący w płaszczyźnie ściśle stycznej kierunkiem normalnym głównym (jeśli poruszamy się ze stałą szybkością skalarną, jest to dokładnie kierunek wektora przyspieszenia), a kierunek prostopadły do płaszczyzny ściśle stycznej — kierunkiem binormalnym. Druga krzywizna, czyli skręcenie, miała mierzyć, na ile dana krzywa nie jest płaska. O ile krzywizna była określona jako szybkość zmian wektora stycznego, skręcenie zostało zdefiniowane jako szybkość zmian płaszczyzny ściśle stycznej lub, co na jedno wychodzi, jednostkowego wektora binormalnego. Jakie jest znaczenie skręcenia? Otóż okazuje się, że znajomość krzywizny i skręcenia (w przypadku płaskim — samej krzywizny) wystarcza już do pełnego opisu krzywej, oczywiście tylko z dokładnością do jej położenia w przestrzeni.

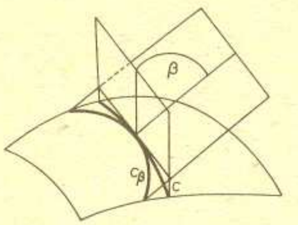
Równolegle z teorią krzywych zaczęła się rozwijać teoria powierzchni. Za twórcę jej podstaw należy uznać L. Eulera. Powierzchnię w okolicy danego punktu badał rozpatrując wszystkie możliwe przekroje tej powierzchni płaszczyznami prostopadłymi do niej i przechodzącymi przez dany punkt. Wśród tych płaszczyzn wybrał jedną, a pozostałe parametryzował za pomocą kąta φ, który tworzą one z tą wybraną. Następnie znalazł zależność krzywizny otrzymanego przekroju prostopadłego od kąta φ. Była ona postaci $\varkappa = L + M\cos 2\varphi + N\sin 2\varphi$, gdzie L, M, N oznaczały pewne współczynniki zależące od danej powierzchni. Aby znaleźć wartości ekstremalne krzywizny przekroju, Euler zróżniczkował to względem φ, przyrównał do zera i otrzymał równanie $\mathrm{tg}\, 2\varphi = \dfrac{N}{M}$. Z okresowości funkcji tangens wynika, że istnieją dwa prostopadłe (!) rozwiązania. Znaczy to, że jeśli w jednym z kierunków krzywizna przekroju jest największa, to w prostopadłym do niego — najmniejsza. Kierunki te nazywają się obecnie kierunkami głównymi, a odpowiednie krzywizny przekroju — krzywiznami głównymi. Łatwo je dostrzec np. na walcu: krzywizna przekroju waha się tam od zera (przekrój równolegle do osi) do odwrotności promienia „podstawy" (przekrój prostopadle do osi). Na sferze wszystkie przekroje są jednakowe, więc wszystkie kierunki są główne.





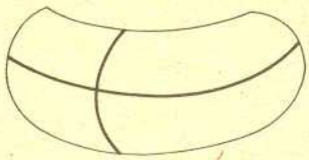
Krzywizna przekroju normalnego walca waha się od 0 do $\frac{1}{r}$.

Skoro mówimy o krzywiźnie przekroju płaszczyzną, to warto wspomnieć również twierdzenie udowodnione przez matematyka francuskiego Meusnier'a i mówiące o przekroju dowolną płaszczyzną (niekoniecznie prostopadłą). Otóż jeśli taka płaszczyzna jest odchylona od kierunku prostopadłego o kąt β, to aby obliczyć krzywiznę otrzymanego przekroju, prowadzimy najpierw przekrój płaszczyzną prostopadłą w tym samym kierunku stycznym, obliczamy jego krzywiznę, a następnie dzielimy ją przez $\cos\beta$. Należy również dodać, że już wtedy rozpatrywano krzywizny główne opatrzone znakiem. W zależności od tego, czy odpowiednie środki krzywizny leżały po tej samej, czy po przeciwnych stronach powierzchni, krzywizny główne były tego samego albo różnych znaków. Na przykład na torusie po stronie zewnętrznej (dalszej od środka) obie krzywizny są tego samego znaku, a po stronie wewnętrznej — różnych znaków. Widać więc, że powierzchnia ma lokalnie kształt „górki" (lub „dołka"), jeśli krzywizny główne są jednego znaku i kształt „przełęczy", gdy są różnych znaków.

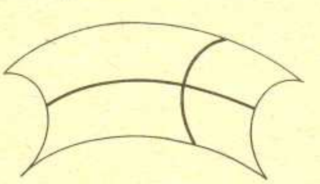


$\varkappa(c_\beta) = \dfrac{\varkappa(c)}{\cos\beta}$

Meusnier udowodnił jeszcze inne ciekawe twierdzenie. Wykazał mianowicie, że jeśli powierzchnia jest ograniczona krzywą zamkniętą i ma najmniejsze pole spośród powierzchni ograniczonych tą krzywą (np. błonka mydlana rozpięta na pętelce z drutu), to w każdym punkcie tej powierzchni suma krzywizn głównych wynosi zero.

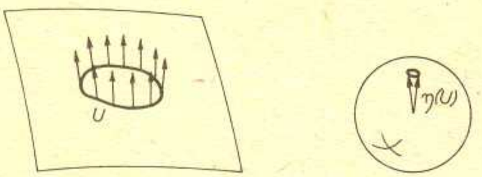


$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 > 0$

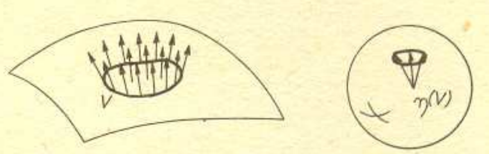


$\varkappa_1 \cdot \varkappa_2 < 0$

Decydującego kroku w rozwoju teorii powierzchni dokonał Gauss. Między innymi wprowadził nowy rodzaj krzywizny, dzisiaj zwany krzywizną Gaussa. Mianowicie, rozpatrywał na powierzchni jednostkowe pole normalne, tzn. w każdym punkcie powierzchni zaczepił jednostkowy wektor prostopadły. Następnie skorzystał z pomysłu Eulera zdefiniowania krzywizny krzywych za pomocą indykatrysy sferycznej. Przypomnijmy, że tam krzywizna była mierzona szybkością zmian wektora stycznego. Tutaj — szybkością zmian pola normalnego. Gauss przeniósł wektory normalne do początku układu współrzędnych i otrzymał tzw. odwzorowanie sferyczne η z powierzchni w sferę jednostkową, przyporządkowujące punktowi na powierzchni koniec wektora normalnego w tym punkcie (przesuniętego do początku układu). Następnie dla dowolnego punktu p rozpatrzył jego małe otoczenie U na powierzchni i porównał jego pole powierzchni z polem powierzchni jego obrazu $\eta(U)$. Krzywiznę powierzchni w punkcie p określił jako granicę ilorazu $\dfrac{\text{pole } \eta(U)}{\text{pole } U}$ przy U malejącym do punktu p (zaopatrzoną jeszcze w znak „$-$", jeśli odwzorowanie sferyczne zmienia orientację, tzn. w przypadku powierzchni typu „przełęcz"). Zobaczmy to na kilku przykładach.

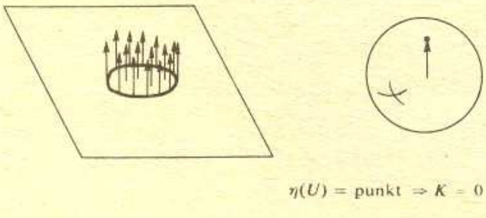


Krzywizna Gaussa mała, bo $\dfrac{\text{pole } \eta(U)}{\text{pole } U}$ małe.

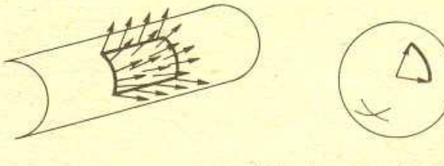


Krzywizna Gaussa większa, bo $\dfrac{\text{pole } \eta(V)}{\text{pole } V}$ większe.

Dla płaszczyzny odwzorowanie sferyczne jest stałe, zatem krzywizna Gaussa jest równa zeru ($\eta(U)$ jest zawsze jednym punktem). Dla walca obrazem η jest koło wielkie na sferze i znowu obraz dowolnego otoczenia ma zerową powierzchnię. Krzywizna Gaussa, jak poprzednio, wynosi zero.

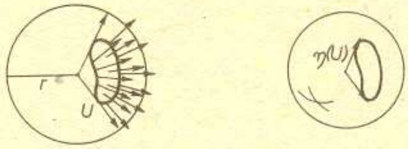


$\eta(U) = \text{punkt} \Rightarrow K = 0$

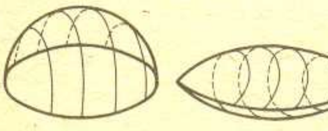


$\eta(U) = \text{krzywa} \Rightarrow K = 0$

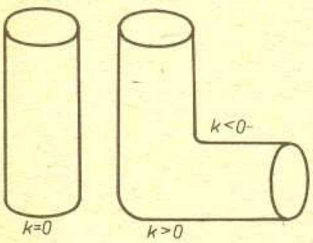
Dla sfery o promieniu r odwzorowanie sferyczne jest jednokładnością o skali $\frac{1}{r}$, a więc dla dowolnego U pole $\eta(U) = \frac{1}{r^2} \cdot$ pole U. Wynika stąd, że krzywizna Gaussa jest równa $\frac{1}{r^2}$.

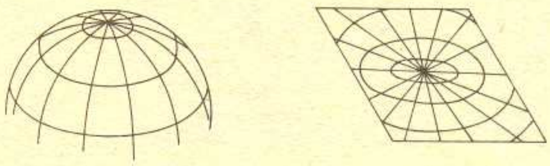


$K = \frac{1}{r^2}$

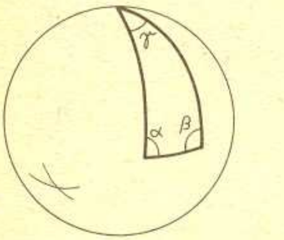


Gauss podał wzór pozwalający wyliczyć krzywiznę dowolnej powierzchni, gdy dana jest jej parametryzacja. Ze wzoru tego wyprowadził wniosek, że nowa krzywizna jest akurat równa iloczynowi krzywizn głównych określonych pół wieku wcześniej przez Eulera, $K = \varkappa_1 \cdot \varkappa_2$. Łatwo to sprawdzić na przykładach rozpatrzonych przed chwilą. Wynikiem, który Gaussowi sprawił największą radość, było twierdzenie mówiące, że nowa krzywizna nie zmienia się przy zginaniach powierzchni (bez rozciągania). Sam określił je jako „theorema egregium" (twierdzenie wspaniałe, chwalebne). Wyobraźmy sobie np. kawałek gumowej piłki. Gdy próbujemy ją w jednym kierunku nieco wyprostować, w drugim zagina się sama — a krzywizna Gaussa, czyli iloczyn krzywizn głównych, nie zmienia się. Inny przykład: rury walcowej nie da się zagiąć bez jej rozciągania — inaczej krzywizna Gaussa musiałaby się zmienić. Z tych samych powodów nie da się wykonać mapy kuli ziemskiej (ani jej części) z zachowaniem wszystkich odległości.





$k>0$ $k=0$



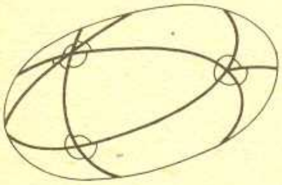
$\iint K = \alpha+\beta+\gamma-\pi$

Aby wspomnieć o jeszcze jednym z wyników Gaussa, przypomnijmy najpierw, że geodezyjną na powierzchni nazywamy krzywą, która spełnia jeden z równoważnych warunków: 1) lokalnie minimalizuje odległość między swoimi punktami, 2) jej płaszczyzny ściśle styczne są prostopadłe do powierzchni (tzn. posuwając się po niej nie skręcamy na boki). Otóż wspomniany wynik Gaussa mówi, że jeśli na powierzchni dany jest trójkąt geodezyjny A (tzn. figura ograniczona trzema geodezyjnymi), to całka z krzywizny Gaussa po tym trójkącie jest równa sumie jego kątów wewnętrznych minus π. Wynika stąd np., że na sferze suma kątów trójkąta geodezyjnego jest zawsze większa niż π.

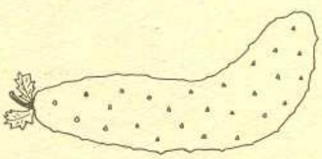
Postaramy się teraz scałkować krzywiznę Gaussa na dowolnej domkniętej i ograniczonej powierzchni M. Najpierw dzielimy ją na trójkąty geodezyjne $M = \cup A_i$. Oznaczmy przez W, B i S odpowiednio liczbę wierzchołków, krawędzi i ścian tego podziału. Ze wzoru Gaussa mamy

$$\iint_M K = \sum \iint_{A_i} K = 2\pi W - \pi S = 2\pi(W-B+S) = 2\pi\chi(M).$$

Skorzystaliśmy tu z tego, że każdy trójkąt ma trzy boki, a każda krawędź jest bokiem dwóch trójkątów, co daje $B = \frac{3}{2} S$. Liczba $\chi(M) = W-B+S$ nazywa się charakterystyką Eulera powierzchni M i wiadomo o niej, że nie zależy od podziału na trójkąty, a ponadto, że nie zmienia się przy pewnych ciągłych odkształceniach M (można rozciągać, ale nie przecinać ani sklejać). Jest więc tzw. niezmiennikiem topologicznym. Wynika z tego bardzo ciekawy wniosek, że całka krzywizny Gaussa jest też takim niezmiennikiem. Zatem obliczając tę całkę gubimy niemal wszystkie informacje o geometrii powierzchni (potrzebne do obliczenia samej krzywizny)!



Suma wszystkich występujących tu kątów wewnętrznych wynosi $2\pi W$.



$\iint K = 4\pi$, bo ogórek $\sim$ sfera, więc $\chi = 2$.

$\iint K = 0$, bo babka $\sim$ torus, więc $\chi = 0$.

Na zakończenie wymieńmy jeszcze twierdzenie Mindinga mówiące o tym, że dwie powierzchnie o stałej i równej krzywiźnie Gaussa lokalnie powstają jedna z drugiej przez zginanie. W szczególności aby wiedzieć, czy dana powierzchnia rozwija się na płaszczyznę, wystarczy sprawdzić, czy jej krzywizna Gaussa jest równa zeru. Ten przykład, jak i inne wspomniane poprzednio, świadczy o dużym znaczeniu różnych rodzajów krzywizny w geometrii.