# Klub 44

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

## Skrót regulaminu

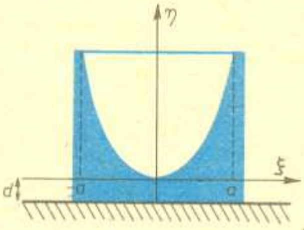
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru $n$ w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3\,S/N$, gdzie $S$ oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a $N$ — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.

Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 1988

## Zadania z fizyki nr 63 i 64

*Redaguje dr Andrzej NADOLNY*

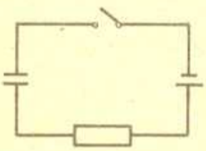



Rys. 1

**63.** Na poziomym stole spoczywa „kielich" o masie $M$. Jego wewnętrzna powierzchnia jest paraboloidą obrotową, której przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś paraboloidy jest (w układzie związanym z „kielichem" — rysunek 1) określony równaniem

$$\eta = k\xi^2 \qquad (-a < \xi < a).$$

Na brzegu paraboloidalnej powierzchni umieszczono mały klocek o masie $m$ i puszczono go. Określić charakter ruchu wykonywanego przez ten klocek przy zaniedbywalnym tarciu klocka o „kielich" oraz „kielicha" o stół i znaleźć równanie toru klocka (traktowanego punktowo) w układzie związanym ze stołem.



Rys. 2

**64.** Zestawiono obwód jak na rysunku 2, złożony ze źródła napięcia o sile elektromotorycznej 18 V i oporze wewnętrznym 3 $\Omega$, kondensatora o pojemności 40 mF oraz opornika (o nominalnej mocy 0,5 W) o oporze 10 $\Omega$ wiszącego na przewodach między baterią a kondensatorem. O ile wzrośnie temperatura opornika po zamknięciu obwodu, jeśli jego masa wynosi 0,7 g, a ciepło właściwe — przy traktowaniu opornika jako ciała termicznie jednorodnego — 0,7 $\mathrm{J g^{-1} K^{-1}}$? Czy wzrost temperatury opornika byłby taki sam, mniejszy czy też większy, gdyby jego opór wynosił 10 k$\Omega$?

## Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 10/1987

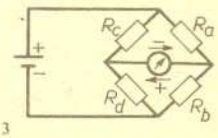
Przypominamy treść zadań:

55. Danych jest 15 oporników, z których jeden różni się oporem od pozostałych. Dysponując ogniwem, galwanometrem (z zerem pośrodku skali) i przewodami do połączeń należy zidentyfikować odmienny opornik i określić, czy jego opór jest większy, czy też mniejszy od oporu pozostałych oporników. W jaki sposób postępować, aby tego dokonać za pomocą jak najmniejszej liczby pomiarów?

56. Patrząc przymrużonymi oczyma na odległe latarnie widzimy zwykle dodatkowo „promienie" odchodzące ze źródła światła w górę i w dół. Podać wyjaśnienie tego zjawiska, możliwie poparte własnymi obserwacjami.
Wskazówka: powierzchnia rogówki oka jest zawsze pokryta warstwą śluzowatej cieczy.

**55.** Numerujemy oporniki kolejno od 1 do 15, oznaczając ich opory odpowiednio przez $R_1$, $R_2$, ... $R_{15}$. Następnie łączymy po trzy oporniki szeregowo i zestawiamy układ mostkowy jak na rysunku 3, stosując trzy kombinacje wyrażone w poniższej tabelce.

| | $R_a$ | $R_b$ | $R_c$ | $R_d$ |
|---|---|---|---|---|
| I | $R_1+R_2+R_3$ | $R_4+R_5+R_6$ | $R_7+R_8+R_9$ | $R_{10}+R_{11}+R_{12}$ |
| II | $R_1+R_2+R_3$ | $R_4+R_5+R_6$ | $R_{10}+R_{11}+R_{12}$ | $R_{13}+R_{14}+R_{15}$ |
| III | $R_4+R_5+R_6$ | $R_7+R_8+R_9$ | $R_{10}+R_{11}+R_{12}$ | $R_{13}+R_{14}+R_{15}$ |




Rys. 3

Za każdym razem notujemy wskazanie galwanometru: brak wychylenia świadczy o tym, że nietypowy opornik znajduje się poza mostkiem, wychylenie „+" oznacza, że jeden z oporów $R_a$, $R_d$ ma mniejszą wartość lub jeden z oporów $R_b$, $R_c$ ma większą wartość od pozostałych, wychylenie „−" oznacza stwierdzenie przeciwne. Na podstawie tych trzech — co najwyżej — pomiarów znajdujemy trójkę oporników zawierającą nietypowy opornik i określamy, czy jego opór jest większy, czy też mniejszy od oporu pozostałych oporników.
Na przykład wyniki I „+", II „+", III „−" wskazują, że nietypowy opornik znajduje się w trójce $R_4$, $R_5$, $R_6$ i jest większy, w przypadku wskazań I „+", II „−" poszukiwany opornik znajduje się wśród $R_{10}$, $R_{11}$, $R_{12}$ i jest mniejszy (pomiar III niepotrzebny).
W końcu rozłączamy nietypową trójkę i dwa z oporników wstawiamy do mostka jako $R_a$ i $R_b$, dając w miejsce $R_c$ i $R_d$ dwie inne — identyczne — trójki (lub też pojedyncze oporniki). Ten czwarty pomiar umożliwia ostateczną identyfikację nietypowego opornika wraz z określeniem znaku odchyłki jego oporu względem reszty oporników.


Rys. 4

**56.** Śluzowata ciecz pokrywająca rogówkę oka tworzy przy powiekach pryzmatyczny menisk, który załamuje światło (patrz rysunek 4). Przy dolnej powiece promienie ulegają załamaniu w dół dając taki efekt, jakby przychodziły z góry — stąd te widziane „promienie" odchodzące od oglądanego źródła w górę. Podobnie pryzmat cieczowy przy górnej powiece odchyla promienie do góry, dając wrażenie „promieni" odchodzących od źródła w dół. Warunkiem zajścia tego zjawiska jest, oczywiście, aby pryzmat cieczy znajdował się w obrębie źrenicy, co występuje właśnie przy przymrużonych powiekach. Podczas przekręcania głowy „promienie" również przekręcają się, gdyż pozostają prostopadłe do krawędzi powiek. Ponieważ krawędzie te są zaokrąglone, obserwowane wiązki „promieni" są lekko rozbieżne, a podczas patrzenia kątem oka pochylają się względem siebie.

Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M" po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 153 /WT=1,51/ i 154 /WT=2,52/ z numeru 8/1987

| | | |
|---|---|---|
| Marcin Mazur | - Białystok | 47,59pkt |
| Piotr Kumor | - Olsztyn | 47,51pkt |
| Jan Ciach | -Ostrowiec Ś | 44,17pkt |
| Mirosław Mikucki | - Augustów | 42,68pkt |
| Piotr Wach | - Katowice | 41,35pkt |
| Edward Orzechowski | - Warszawa | 41,15pkt |
| Tadeusz Józefczyk | - Poznań | 41,10pkt |
| Krzysztof Jedziniak | - Katowice | 39,85pkt |

Sumę 44 punktów przekraczają: pan Mazur po raz trzeci /ósmy Weteran Klubu 44/, pan Kumor po raz pierwszy i pan Ciach po raz drugi.

## Zadania z matematyki nr 165, 166

*Redaguje dr Marcin E. KUCZMA*

**165.** Funkcja $f$ o wartościach rzeczywistych, określona i różniczkowalna w zbiorze liczb dodatnich, spełnia warunek: $\lim_{x\to\infty}(f(x)+f'(x)) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$?

**166.** W przestrzeni trójwymiarowej z ustalonym kartezjańskim układem współrzędnych rozpatrujemy zbiór punktów kratowych, tj. punktów, których wszystkie współrzędne są liczbami całkowitymi. Niech $K$ będzie sześcianem jednostkowym o wierzchołkach w punktach kratowych i niech będzie dany dowolny punkt kratowy $P$. Udowodnić, że spośród ośmiu odległości punktu $P$ od wierzchołków sześcianu $K$ co najmniej cztery są liczbami niewymiernymi.

Zadanie **166** zaproponował pan Werner Mnich z Opola.

### Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 10/1987

Przypominamy treść zadań:

157. Wielokąt $W$ ma pole $S$ i obwód $d$. Dowieść, że $W$ zawiera koło o promieniu $> S/d$.

158. Dane liczby rzeczywiste $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$, $\sum x_i = 0$. Dowieść, że $\sum x_i^2 \leqslant -nx_1x_n$ i ustalić, kiedy zachodzi równość.

**158.** Liczby $x_1$ i $x_n$ są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $f(t) = t^2-(x_1+x_n)t+x_1x_n$. Zatem $f(t) < 0$ dla $t \in (x_1\,;x_n)$, a stąd $0 \geqslant f(x_1)+\ldots+f(x_n) = \sum x_i^2-(x_1+x_n)\sum x_i+nx_1x_n = \sum x_i^2+nx_1x_n$, przy czym nierówność jest ostra, jeśli choć jedna z liczb $x_i$ należy do przedziału otwartego $(x_1\,;x_n)$. Innymi słowy: nierówność przechodzi w równość wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = \ldots = x_k$, $x_{k+1} = \ldots = x_n$ dla pewnego $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

**157.** Przypuśćmy, że nie istnieje koło o promieniu $r$ zawarte w $W$. Wówczas każdy punkt wielokąta $W$ jest odległy nie więcej niż o $r$ od brzegu. To znaczy, że jeśli weźmiemy paski szerokości $r$ wzdłuż każdego boku, to one (w zasadzie) pokryją $W$. Problem pojawia się przy wierzchołkach, gdzie trzeba dokonać staranniejszej kalkulacji. Mianowicie, jeśli mamy bok od $A$ do $B$, budujemy nie pasek, ale zbiór punktów odległych o $\leqslant r$ od $\overline{AB}$ i leżących pomiędzy dwusiecznymi kątów $A$ i $B$. Pole tego zbioru równa się $r\cdot$(długość $\overline{AB}$)+(dwa przyczynki przy końcach). Jeśli kąt przy wierzchołku (np. $A$) jest $<\pi$, musimy odjąć trójkąt prostokątny o wysokości $r$ i kącie $A/2$; ma on pole większe niż zawarty w nim wycinek koła o polu $(r^2/4)(\pi-A)$. Jeśli kąt przy wierzchołku (np. $B$) jest $\geqslant \pi$, musimy dodać wycinek koła o rozwartości kątowej $(B-\pi)/2$, o polu $(r^2/4)(B-\pi)$. Łącznie więc, pełna powierzchnia tych zbiorów jest ograniczona przez $r\cdot$obwód$-(r^2/2)$(suma kątów zewnętrznych) $= r\cdot$obwód$-\pi r^2$, a ponieważ z założenia suma tych zbiorów zawiera cały wielokąt, widzimy, że pole $\leqslant r\cdot$obwód$-\pi r^2$. Skoro to jest prawda dla wszystkich $r$ przekraczających maksymalny promień koła wpisanego, zatem $S/d$ jest dolnym ograniczeniem długości tego promienia.

---

Czytelnicy zapewne zauważyli, że podane tu rozwiązanie zadania **157** różni się stylem i charakterem od większości prezentowanych w lidze rozwiązań. Być może, zauważyli też, że jest ono w ogóle niepoprawne. Zadanie to zostało zaczerpnięte z pewnego amerykańskiego zbioru zadań. Znajduje się ono tam wraz z rozwiązaniem, którego dosłownym tłumaczeniem jest przytoczony tekst. O tym, że zawiera ono istotny błąd (niedokładność? lukę?) przekonaliśmy się dopiero przy opracowywaniu rozwiązań do naszego numeru, gdy temu rzeczywiście sugestywnemu rozumowaniu próbowaliśmy nadać bardziej precyzyjną formę. Uznaliśmy jednak, że warto to „firmowe" rozwiązanie pokazać Czytelnikom, zachęcając ich do przyjrzenia się możliwym sytuacjom, wykrycia luki i do próby znalezienia poprawnego rozwiązania. Dowód, który nam się udało dopracować (zresztą oparty generalnie na tym samym pomyśle „brania pasków wzdłuż boków") jest — nie będziemy tego ukrywać — dość zawiły. Przedstawimy go Czytelnikom w odrębnym artykule w drugiej połowie roku.

Może uda się komuś z Czytelników znaleźć rozwiązanie niezbyt skomplikowane, a przy tym bezbłędne. Prosimy wówczas o przysłanie; oczywiście już nie w ramach konkursu ligowego (zresztą, w chwili, gdy piszemy te słowa, nie wiemy jeszcze, co znajduje się w korespondencji od uczestników ligi). Jeśli przysłane rozwiązanie okaże się istotnie prostsze czy nawet tylko istotnie różne od znalezionego przez nas, chętnie je wydrukujemy. Problem wydaje nam się na tyle ciekawy, że warto do niego powracać.

Przy redakcji "Delty" powstał ZERO KOPRU, czyli Zespół Rozpowszechniania Konkursu Prac Uczniowskich, złożony z laureatów dotychczasowych konkursów. Członkowie zespołu będą wyjeżdżać do szkół średnich na spotkania z uczniami, wystarczy tylko, aby zainteresowane takim spotkaniem szkoły skontaktowały się z redakcją "Delty" w celu uzgodnienia szczegółów wizyty. Liczymy na to, że uda nam się zachęcić uczniów do szerszego niż dotychczas udziału w konkursie, a co najważniejsze - pomóc w wyborze interesującego tematu pracy konkursowej. Przypominamy, że Konkurs Prac Uczniowskich z Matematyki jest organizowany corocznie, a szczegółowy regulamin ukazał się w "Delcie" 2/1987, ukaże się także w "Delcie" 2/1988.

## Regulamin Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

1. Konkurs organizowany jest corocznie przez Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa Matematycznego i Redakcję miesięcznika *Delta*, przy poparciu Ministerstwa Oświaty i Wychowania.
2. W konkursie mogą brać udział uczniowie wszystkich typów szkół.
3. Konkurs składa się z eliminacji i finału.
4. W eliminacjach bierze udział uczeń, który w terminie do dnia 1 maja prześle pod adresem Redakcji *Delty* jeden egzemplarz swojej pracy matematycznej. Do pracy należy dołączyć następujące informacje: adres prywatny autora, klasa, nazwa i adres szkoły, imię, nazwisko i adres nauczyciela — opiekuna pracy.
5. Praca powinna zawierać samodzielny wkład ucznia i pełną informację o źródłach, z których korzystał jej autor. Prace czysto kompilacyjne nie będą dopuszczone do finału konkursu.
6. Prace nadesłane na eliminacje zostaną ocenione przez Komisję Konkursu i kompetentnych recenzentów. Te spośród prac, które spełniają warunki konkursu, zostaną przedstawione Jury Konkursu. Jury zakwalifikuje najlepsze prace do finału, który odbędzie się w trakcie dorocznej Sesji Naukowej Polskiego Towarzystwa Matematycznego.
7. Zawiadomienia o zakwalifikowaniu do finału zostaną przesłane autorom prac oraz nauczycielom — opiekunom prac przed końcem roku szkolnego.
8. Finaliści i nauczyciele opiekujący się ich pracami otrzymują od Zarządu Głównego PTM zaproszenie do udziału w Sesji na koszt Towarzystwa.
9. Finał polega na wygłoszeniu (nie na odczytaniu) przez ucznia, podczas specjalnego otwartego posiedzenia Sesji, referatu (trwającego nie dłużej niż 15 minut) i wzięciu udziału w dyskusji na temat, któremu poświęcona była praca.
10. Rezultaty finału oceni Jury Konkursu. Jury będzie brało pod uwagę, oprócz merytorycznej wartości pracy, również samodzielność i oryginalność ujęcia tematu oraz przebieg referatu i dyskusji. Jury przyznaje medale: złoty, srebrny i brązowy, wyróżnienia oraz nagrody pieniężne fundowane przez Ministerstwo Edukacji Narodowej.
11. Ogłoszenie wyników finału następuje w trakcie Walnego Zgromadzenia Polskiego Towarzystwa Matematycznego. Medale wręcza Prezes Towarzystwa. Wszyscy uczestnicy finału otrzymują dyplomy.
12. Wyniki konkursu i skrót zwycięskiej pracy będą opublikowane w miesięczniku *Delta*.
13. Komisję Konkursu oraz Jury Konkursu powołuje Zarząd Główny PTM na wniosek Komitetu Redakcyjnego *Delty*.