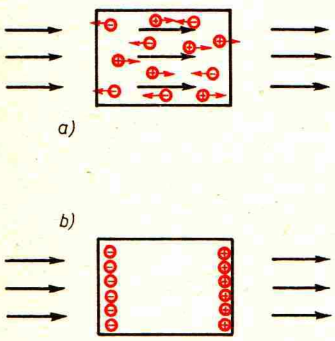
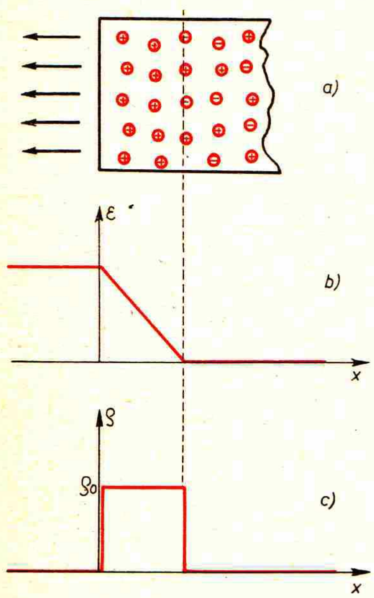
Rozwiązanie zadania M 495. Istnieją.
Przyjmijmy oznaczenia:

$$(*)\qquad \begin{cases} u = x-y+1 \\ v = y-z-1. \\ w = z-x+1 \end{cases}$$

Tożsamość $u+v+w = 1$ podnosimy stronami do piętnastej potęgi. Otrzymujemy po lewej stronie wielomian jednorodny (zmiennych u, v, w) stopnia 15. W każdym jego składniku któraś ze zmiennych występuje z wykładnikiem ≥ 5. Można zatem zapisać ten wielomian jako $u^5p(u, v, w)+v^5q(u, v, w)+w^5r(u, v, w)$, gdzie p, q, r są wielomianami. Podstawieniem (*) wracamy do zmiennych x, y, z.



Rys. 1. Przewodnik w polu elektrostatycznym
a) po włączeniu pola,
b) po ustaleniu się równowagi.



Rys. 2. Zanik pola elektrycznego w przewodniku o ujemnych nośnikach prądu elektrycznego (pole skierowane na zewnątrz).
a) Pole i ładunki ruchome (−) oraz nieruchome (+).
b) Natężenie pola w zależności od odległości od powierzchni przewodnika.
c) Gęstość ładunku elektrycznego w zależności od położenia.

Obalamy prawa fizyki

Doc. dr Jan A. GAJ

Człowiek tworzy prawa fizyki, aby opisać rzeczywistość. Następnie przywiązuje się do nich nadmiernie, zapominając, że to nie fakty mają być posłuszne teoriom, lecz odwrotnie. Kontynuując walkę z tym „naukowym" bałwochwalstwem, rozpoczętą w numerze 10/1987 artykułem na temat atomu wodoru w stanie podstawowym, chciałbym dzisiaj zastanowić się wspólnie z Tobą, Czytelniku, nad słusznością często spotykanego w podręcznikach twierdzenia, że

Pole elektrostatyczne nie wnika do przewodnika

A prawo Ohma? — zapytasz. Jeśli jest napięcie, to i pola elektrycznego nie unikniemy. Oczywiście nie chodzi mi o tak prymitywne przekomarzanie się z Tobą. Chodzi mi o pole elektrostatyczne, a więc istniejące w statycznym stanie równowagi, kiedy żaden prąd nie płynie. Czy na pewno nie płynie? Sam osądzisz.

Dowód

jest prosty. Pola elektrycznego nie może być w przewodniku, bo gdyby było, to działając siłą na znajdujące się w nim swobodne ładunki powodowałoby ruch tych ostatnich w takim kierunku, że zmniejszałoby samo siebie (patrz rys. 1). Ruch ten będzie trwał dopóty, dopóki pole wewnątrz przewodnika nie zniknie zupełnie; dopiero wtedy osiągniemy sytuację statyczną — stan równowagi.

A jednak wnika

Żeby to wykazać, przyjrzyjmy się bliżej przewodnikowi. Sytuacja jak na rysunku 1, kiedy istnieją swobodne ładunki obu znaków, jest bardzo rzadka (na przykład plazma, jaką tworzy zjonizowany gaz). Najczęściej ruchome są ładunki tylko jednego znaku (w metalach — ujemne elektrony), a kompensujące ładunki znaku przeciwnego (w metalach — dodatnie jony) tkwią nieruchomo w przewodniku tworząc periodyczną sieć przestrzenną (kryształy) lub układ chaotyczny (ciała amorficzne). Jeżeli pole elektryczne przyłożono w taki sposób, żeby wpychać swobodne ładunki do wnętrza przewodnika, to warstwa powierzchniowa ładunku, która kompensuje pole wewnątrz przewodnika, pochodzi od ładunku nieruchomego, odsłoniętego po cofnięciu się swobodnych nośników. Gęstość powierzchniowa tego ładunku jest wyznaczona przez pole elektryczne, w którym umieściliśmy przewodnik i może być wyliczona przy użyciu prawa Gaussa. Aby otrzymać tę gęstość powierzchniową ładunku, ładunki swobodne muszą cofnąć się na określoną głębokość odsłaniając wymaganą liczbę nieruchomych jonów przeciwnego znaku. Powstanie w ten sposób warstwa naładowana o grubości $d = \Sigma/\varrho_0$ (gdzie Σ jest gęstością powierzchniową, a ϱ_0 gęstością objętościową ładunku nieruchomego), w której pole zanika od wartości maksymalnej do zera (rys. 2).

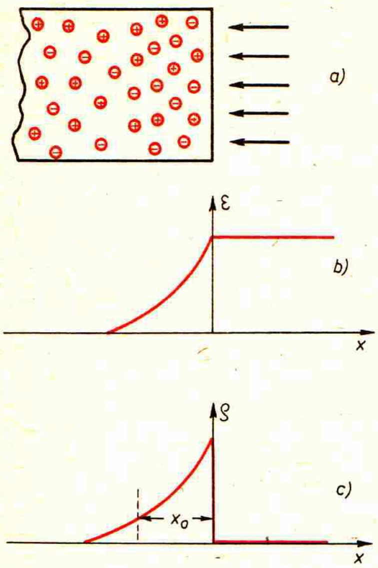
A więc wykazaliśmy, że pole wnika do przewodnika. Oszacujmy grubość tej warstwy przy założeniu, że natężenie pola elektrycznego przy powierzchni metalu wynosi $\mathscr{E} = 1$ kV/mm (typowa wartość w doświadczeniach elektrostatycznych), a przewodnikiem jest miedź (gęstość objętościowa ładunku $\varrho_0 = 1{,}4 \cdot 10^{11}$ C/m^3). Grubość warstwy wyniesie więc:

$$d = \Sigma/\varrho_0 = \varepsilon_0\mathscr{E}/\varrho_0 = 6{,}3 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{m} = 6{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{Å}.$$

Ależ to jest bezsensowne zawracanie głowy! — zawołasz. Mówić o warstwie opróżnionej z nośników, której grubość jest zaniedbywalnie mała w porównaniu z rozmiarami atomu, nie ma żadnego sensu! To prawda, ale w półprzewodnikach, w których koncentracja nośników swobodnych bywa o wiele rzędów wielkości niższa niż w metalach, głębokość wnikania pola może być znacząca. Co więcej, fakt ten pozwala na zmierzenie gęstości objętościowej ładunku nieruchomego, a nawet pozwolił stworzyć całą technikę eksperymentalną znaną jako spektroskopia pojemnościowa, w której badamy ewolucję w czasie stanu ładunkowego domieszek w półprzewodnikach. Dlaczego pojemnościowa? Bo warstwa opróżniona ze swobodnych nośników tworzy rodzaj kondensatora. Mierząc jego pojemność wyznaczamy grubość warstwy, a stąd gęstość ładunku. Jak to się robi? O tym innym razem.
Może to wszystko prawda, powiesz, ale to nie jest przewodnik. Warstwa opróżniona z nośników nie przewodzi, cóż więc dziwnego, że wnika do niej pole. Niczego nie obaliliśmy. No cóż, jeżeli tego wszystkiego Ci jeszcze mało, nie poddaję się i wykażę zaraz, że

Do przewodnika też wnika

W tym celu przyjrzyjmy się przeciwnemu końcowi przewodnika rozważanego przed chwilą.



Rys. 3. Zanik pola elektrycznego w przewodniku, gdy pole skierowane jest do wnętrza (oznaczenia jak na rys. 2).

Tam nie ma żadnych kłopotów, powiesz, ładunek swobodny może dojść do samej powierzchni i wytworzyć tam warstwę kompensującą pole elektryczne. Rozumując tak nie uwzględniamy bardzo często spotykanego mechanizmu wyrównującego wszelkie niejednorodności, a mianowicie dyfuzji.

Jak wiadomo, gdy koncentracja mogących się swobodnie poruszać cząstek jest niejednorodna, przemieszczają się one tak, aby tę niejednorodność zmniejszyć. Proces ten opisuje równanie dyfuzji, które w przypadku jednowymiarowym ma postać

$$j_d = -D\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}x,$$

gdzie j_d jest prądem dyfuzji, czyli liczbą cząstek przepływających na jednostkę czasu przez jednostkową powierzchnię prostopadłą do kierunku ich (uśrednionego) ruchu, n — koncentracją cząstek (liczba na jednostkę objętości), a D — stałą dyfuzji.

Dyfuzja prowadzi do rozmycia ogromnej (teoretycznie nieskończonej) gęstości objętościowej ładunku, jaki musiałby skupić się na powierzchni, aby zapobiec wnikaniu pola do wnętrza. Rozmycie zgromadzonego na powierzchni ładunku spowoduje wniknięcie pola na pewną głębokość do przewodnika. Pole to, ciągnąc nośniki w kierunku powierzchni, zahamuje proces dyfuzji — ustali się równowaga (rys. 3).

Może nie wystarczą Ci argumenty jakościowe i zechcesz zapytać

Jak głęboko wnika pole?

Aby znaleźć równanie, które opisze zależność pola od położenia x w półprzewodniku, musimy zażądać, by prąd elektryczny pochodzący od pola kompensował się z prądem dyfuzji. Źródła obu tych prądów wiążą się z rozkładem ładunku, a więc możemy mieć nadzieję, że powyższy warunek pozwoli nam znaleźć ten rozkład.

Wartość prądu dyfuzji musi być równa minus gęstości prądu elektrycznego wywołanego polem, podzielonego przez ładunek jednego nośnika.

(1) $$j_d = -j/q.$$

Ale $j_d = -D\,\mathrm{d}n/\mathrm{d}x$. Pamiętając, że gęstość objętościowa ładunku swobodnego wiąże się z koncentracją nośników n zależnością $\varrho = qn$ mamy

$$j_d = -D/q\cdot \mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}x.$$

Ale $\varrho = \mathrm{d}(\varepsilon\varepsilon_0\mathcal{E})/\mathrm{d}x$, czyli

(2) $$j_d = -D\varepsilon\varepsilon_0/q\cdot \mathrm{d}^2\mathcal{E}/\mathrm{d}x^2.$$

Z drugiej strony

(3) $$j = \sigma\mathcal{E};$$

gdzie σ jest przewodnictwem właściwym materiału.

Podstawiając (2) i (3) do (1) otrzymujemy

$$-D\varepsilon\varepsilon_0/q\cdot \mathrm{d}^2\mathcal{E}/\mathrm{d}x^2 = -\sigma/q\mathcal{E},$$

czyli

$$\mathrm{d}^2\mathcal{E}/\mathrm{d}x^2 = (\sigma/D\varepsilon\varepsilon_0)\mathcal{E}.$$

Zauważmy, że stała $\sigma/D\varepsilon\varepsilon_0$ ma wymiar m^{-2}, a więc jest odwrotnością kwadratu pewnej odległości. Nazwijmy tę odległość x_0. Będzie, oczywiście, $x_0 = \sqrt{D\varepsilon\varepsilon_0/\sigma}$.

Pole elektryczne musi więc zanikać zgodnie z równaniem $\mathrm{d}^2\mathcal{E}/\mathrm{d}x^2 = \mathcal{E}/x_0^2$.

Łatwo sprawdzić, że równanie to jest spełnione przez pole zanikające wykładniczo:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\cdot \mathrm{e}^{-x/x_0},$$

gdzie x_0 jest drogą, na której pole zmniejsza się e razy, czyli charakteryzuje głębokość wnikania pola do przewodnika.

Podstawiając wartości znane dla miedzi: $D = 1{,}1\cdot 10^{-4}\ \mathrm{m^2/s}$, $\sigma = 6\cdot 10^7\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ oraz przyjmując wartość $\varepsilon = 1$, otrzymujemy

$$x_0 \simeq 4\cdot 10^{-12}\ \mathrm{m} \simeq 0{,}04\ \text{Å}.$$

Znowu oburzysz się, że sobie z Ciebie żartuję sugerując, iż wnikanie pola na głębokość małą w porównaniu z rozmiarami atomu można traktować poważnie, i znowu Ci odpowiem, że masz rację, ale w półprzewodnikach, gdzie przewodnictwo właściwe bywa o wiele rzędów wielkości mniejsze, a stała dyfuzji znacznie większa niż w metalach, odległość x_0 może być znacząca. Ponadto zwróć uwagę, Czytelniku, że całe to rozumowanie prowadziliśmy stosując prawa fizyki klasycznej i zapominając, że w mikroświecie obowiązują prawa mechaniki kwantowej, które między innymi opisują niechęć cząstek do lokalizowania się w małym obszarze. Uwierz mi jednak na słowo, że uwzględnienie poprawnego opisu nie zmniejszyłoby opisywanych tu efektów.

Czas już zadać sobie ponownie pytanie: czy istotnie obaliliśmy jakieś prawo fizyczne lub utarty pogląd? Osądź, Czytelniku, sam.

Rozwiązanie zadania F 237. Promieniowanie o długości λ_0, wysyłane przez źródło w układzie odniesienia związanym z wodą, ma długość $\lambda_0' = \lambda_0 + \Delta\lambda$. Musimy teraz określić współczynnik załamania dla λ_0'. Ponieważ

$$n' = n + \frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\Delta\lambda_0 \quad \text{i} \quad \frac{\Delta\lambda_0}{\lambda_0} = \pm\frac{nu}{\mathrm{c}}$$

(znak + odnosi się do rury, w której woda porusza się od źródła), więc

$$n' = n \pm \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\cdot\frac{un}{\mathrm{c}} = n\left(1 \pm \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\cdot\frac{u}{\mathrm{c}}\right).$$

Prędkość fazowa, określona jak w poprzednim zadaniu (**F236**) jest teraz równa

$$v_{1,2} = \frac{\mathrm{c}}{n'} \pm u\cdot\left(1 - \frac{1}{n'^2}\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{c}}{n}\left(1 \pm \lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\cdot\frac{u}{\mathrm{c}}\right)^{-1} \pm u\cdot\left(1 - \frac{1}{n'^2}\right).$$

W przybliżeniu

$$v_{1,2} \simeq \frac{\mathrm{c}}{n} \pm \left(1 - \frac{1}{n^2} - \frac{\lambda_0}{n}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right),$$

co otrzymujemy zaniedbując wyrazy rzędu u/c i zamieniając n'^2 na n^2. Na podstawie ostatniego wzoru różnica czasów przechodzenia światła jest równa

$$\Delta t \simeq \frac{2lu}{\mathrm{c}^2}\left(n^2 - 1 - n\lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right),$$

a względne przemieszczenie prążków jest równe

$$\Delta p' = \frac{4lu}{\mathrm{c}\lambda_0}\left(n^2 - 1 - n\lambda_0\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right) =$$

$$= \Delta p\left(1 - \frac{n\lambda_0}{n^2-1}\cdot\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0}\right).$$

Ponieważ $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda_0} \simeq -\frac{0{,}0015}{43\cdot 10^{-9}}$, $n^2 - 1 - = 0{,}78$, więc

$$\Delta p' = 0{,}64\cdot(1 + 0{,}034) \simeq 0{,}66.$$

Zatem przy podanej dokładności pomiaru położenia prążków uwzględnienie efektu Dopplera jest konieczne.