Klub 44

1. Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego, Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Redakcja miesięcznika *Delta* organizują konkurs — ligę zadaniową pod nazwą **Klub 44.**

2. Zadania konkursowe są ogłaszane w miesięczniku *Delta*, po cztery zadania w każdym numerze: dwa z matematyki i dwa z fizyki, z dwumiesięczną przerwą (nr 6 i 7 każdego roku).

3. Uczestnikiem ligi może być każdy.

4. Uczestnictwo w lidze polega na rozwiązywaniu zadań konkursowych i przesyłaniu opracowanych rozwiązań do redakcji *Delty*. Uczestnikiem zostaje się po przysłaniu rozwiązania co najmniej jednego zadania.

5. Moment przystąpienia do ligi można wybrać dowolnie. Nie ma konieczności rozwiązywania zadań z każdego miesiąca.

6. Rozwiązania zadań z numeru n należy nadsyłać do końca miesiąca $n+2$ (dodawanie modulo 12; na przykład termin nadsyłania rozwiązań zadań z numeru 11/1987 upływa 31 stycznia 1988). W numerze $n+4$ podane są szkicowe rozwiązania.

7. Rozwiązanie każdego zadania powinno być pisane na oddzielnym arkuszu papieru oraz podpisane imieniem i nazwiskiem. Uczniowie proszeni są o podanie klasy, studenci — roku i uczelni. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, z dopiskiem na kopercie: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**.

8. Prace powinny być samodzielne. Jednobrzmiące rozwiązania pisane przez różnych uczestników nie będą brane pod uwagę.

9. Rozwiązanie każdego zadania jest oceniane w skali od 0 do 1, z dokładnością do 0,1. Przy ocenie jest brana pod uwagę nie tylko poprawność merytoryczna i rachunkowa, lecz także pomysłowość metody i elegancja rozwiązania.

10. Każde zadanie otrzymuje współczynnik trudności ustalany po wystawieniu ocen. Współczynnik ten jest liczbą pomiędzy 1 a 4 obliczaną według następującej reguły: jeśli N oznacza liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (matematyka lub fizyka), a S oznacza sumę ocen uzyskanych przez wszystkich uczestników za dane zadanie, wówczas otrzymuje ono współczynnik trudności $WT = 4-3S/N$. Za nadesłane rozwiązanie uczestnik otrzymuje w punktacji ligowej liczbę punktów równą iloczynowi uzyskanej oceny przez współczynnik trudności (z zaokrągleniem do dwóch miejsc po przecinku).

11. Niektóre z zadań można znaleźć (w brzmieniu identycznym lub bardzo zbliżonym) wraz z rozwiązaniami w różnych książkach i czasopismach. Uczestnicy, którzy w takich przypadkach przyślą zamiast własnego rozwiązania dokładny odsyłacz do literatury, otrzymają ocenę maksymalną, pod warunkiem, że w cytowanym źródle istotnie znajduje się pełne rozwiązanie (dowód, obliczenie, konstrukcja).

12. Czytelnicy *Delty* mogą zgłaszać propozycje zadań; jeśli zadanie nie jest własnego autorstwa, należy podawać źródło. Gdy zadanie wykorzystane w lidze pochodzi z propozycji uczestnika ligi (tj. osoby, która przysłała już rozwiązanie jakiegoś zadania — por. p. 4), a dostarczone zostało wraz z rozwiązaniem (choćby szkicowym, ale poprawnym, ewentualnie odsyłaczem do literatury), uczestnik otrzymuje ocenę maksymalną.

13. Punkty zdobyte przez każdego uczestnika za rozwiązania poszczególnych zadań, obliczone według reguły podanej w p. **10**, są sumowane — oddzielnie dla matematyki i dla fizyki. Z chwilą osiągnięcia sumy **44** punktów w jednej z tych dwóch dziedzin uczestnik staje się członkiem **Klubu 44.**

14. Po zgromadzeniu **44** punktów (i zostaniu członkiem **Klubu 44**) można w dalszym ciągu brać udział w konkursie ligowym. Nadwyżka punktów ponad wartość **44** zostaje zaliczona na poczet ponownego uczestnictwa w lidze.

15. Trzykrotne uzyskanie członkostwa **Klubu 44** daje tytuł **Weterana Klubu 44.**

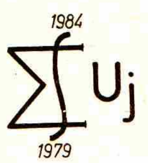
16. Aby uzyskać informacje o swoich wynikach, należy przysłać do redakcji *Delty* kartkę pocztową (oddzielną dla matematyki i fizyki), ofrankowaną i zaadresowaną do siebie, ze sporządzoną tabelką z umieszczonymi w jej rubrykach numerami zadań i z pustymi okienkami do wpisania ocen. Zaleca się przysyłanie takich kartek nie częściej niż co kilka miesięcy, gdy uzbiera się materiał dotyczący rozwiązań kilkunastu zadań.

17. Czołówka listy ligowej jest systematycznie ogłaszana w miesięczniku *Delta*. Nazwisko uczestnika może być wymienione w czołówce z nie zmienioną sumą punktów co najwyżej trzykrotnie; następny raz ukaże się wtedy, gdy wykona ruch w górę.

18. Raz do roku, w numerze styczniowym, drukowane jest omówienie przebiegu konkursu, prezentowane są w skrócie ciekawsze rozwiązania i uogólnienia oraz ogłaszana jest obszerna czołówka (kilkadziesiąt nazwisk).

19. Członkowie **Klubu 44** są zapraszani na coroczne spotkania **Klubu 44.**

20. Organizatorzy zastrzegają sobie wyłączne prawo interpretacji i możność zmian regulaminu.



Czytelnicy, którzy mają w pamięci brzmienie regulaminu ligi z ubiegłych lat, zwrócili z pewnością uwagę na wzrost jego objętości (z szesnastu do dwudziestu punktów). Jest to jednak wzrost pozorny. „Nowe" punkty **11**, **12**, **16**, **18** (i częściowo **17**) wcale nie są nowe; nadają jedynie rangę przepisów regulaminowych zwyczajom, które zdążyły stać się już tradycją.

Również tradycyjna jest nasza prośba do uczestników o parę słów o sobie (choć nie wymaga tego regulamin): wiek, zawód, praca, studia, inne ciekawe dane. Zamieszczony rysunek pokazuje, jak zareagował na analogiczną prośbę sprzed roku pan Mariusz Kraus z Rzeszowa.

„Doroczne" spotkania **Klubu 44**, o których mowa w punkcie **19**, odbywają się — trudno to ukryć — z częstotliwością nieco mniejszą od zamierzonej. Ostatnie miało miejsce w kwietniu 1987 r., wyjątkowo nie w Warszawie, lecz w Krakowie; skorzystaliśmy bowiem z okazji, by je włączyć w program obchodów *Dni Matematyki Krakowskiej.* Na to spotkanie zaprosiliśmy wszystkich tych członków **Klubu 44**, którzy sumę **44** punktów przekroczyli (po raz pierwszy lub kolejny) w okresie od poprzedniego spotkania. Ponieważ spotkaliśmy się w gronie entuzjastów łamigłówek matematycznych, więc jako jeden z punktów programu zaplanowaliśmy sesję „szybkiego rozwiązywania zadań": ktoś z sali stawia problem, a wszyscy zebrani (członkowie **Klubu 44**, organizatorzy, przedstawiciele redakcji *Delty*) usiłują znaleźć rozwiązanie. Kto szybszy, ten lepszy. A gdy zadanie okazuje się niełatwe — następuje połączenie sił. Damy wspólnie radę czy nie? Dwa razy nie daliśmy. W kąciku zadaniowym zamieszczamy dziś trzy zadania spośród tych, z którymi zmagaliśmy się na tamtej sesji. Zadania, których wówczas nie pokonaliśmy, to **M 494** i **M 495.** Czy są aż tak trudne? Czasu było trochę mało ...

Przejdźmy do zadań ligowych z minionego roku. Oprócz prezentowanych, jak zwykle, ciekawszych rozwiązań i uogólnień, zamieszczamy tym razem w omówieniach zadań garść refleksji natury bardziej ogólnej; Czytelnicy zechcą, mamy nadzieję, wybaczyć nam, że chwilami popadamy w moralizatorstwo ...

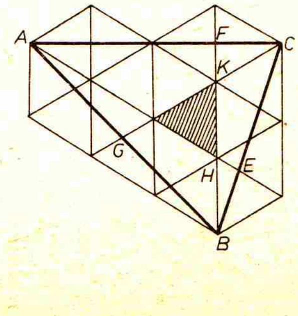
Zadanie 130 [$\inf\limits_{m,n\in\mathbb{N}} (m^{-1/n}+n^{-1/m}) = ?$] było już omawiane przed rokiem, ale wówczas umknęło naszej uwadze, że również pan K. Serbin znalazł uogólnienie: $\inf\limits_{x,y\in(0,1]} (x^y+y^x) = 1.$

Zadanie 133 [Przykład wielościanu o równych krawędziach, w którego szkielet można wpisać kulę, ale na którym nie można opisać kuli] (współczynnik trudności $WT = 3{,}23$; liczba poprawnych rozwiązań $LPR = 12$). Wszystkie przykłady identyczne (dwunastościan rombowy).

Zadanie 137 [Milion punktów na sferze; kombinatoryka] (WT = 3,26; $LPR = 12$). Niech m_k będzie maksymalną liczbą wierzchołków grafu pełnego, którego wszystkie krawędzie są pomalowane k kolorami tak, że nie powstaje trójkąt jednobarwny. Wszystkie rozwiązania sprowadzają się do nierówności $m_k \leqslant n_k$, gdzie $n_1 = 2$, $n_k = kn_{k-1}+1$. A. Bonk, P. Jędrzejewicz, M. Mazur podają wyraźny wzór na wyrazy ciągu (n_k): $n_k = [ek!] = k! \sum\limits_{j\leqslant k} 1/j!$.

Zadanie 140 [S = pole $\Delta\, ABC$; $E \in BC$, $F \in CA$, $G \in AB$; $AG = GB$, $2BE = EC$, $3CF = FA$; S' = pole Δ (pr AE, pr BF, pr CG); $S'/S = ?$] ($WT = 2{,}01$; $LPR = 39$). Urodą wyróżniają się rozwiązania typu „Patrz!" (A. Przeździecki, J. Kozak) polegające na pokryciu płaszczyzny siatką trójkątów przystających do rozważanego trójkąta o polu S' (rysunek).

$$S_{BCK} = 2S'$$
$$S_{ABH} = 3S'$$
$$\underline{S_{AHKC} = 5S'}$$
$$S = 10S'$$



Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

W wielu rozwiązaniach przekształcano dany trójkąt afinicznie na trójkąt foremny. Jest to postępowanie poprawne, ale niecelowe, bo nie prowadzi do jakiegokolwiek uproszczenia rozumowań, a niektóre rachunki zaciemnia. Warto nadmienić, że zadanie jest szczególnym przypadkiem twierdzenia Routha mówiącego, że jeśli $BE : EC = x$, $CF : FA = y$, $AG : GB = z$, to $S' : S = (xyz-1)^2\,(xy+x+1)^{-1}\,(yz+y+1)^{-1}\,(zx+z+1)^{-1}$.

Zadanie 141 [$a_n = n(n+1)\ldots(n+7)$; $\sum 1/a_n = ?$] ($WT = 1{,}79$; $LPR = 54$). Łatwe. Szereg do zsumowania — dość typowy; do znalezienia w tablicach całek i szeregów. Ale — jak to w tablicach — bez dowodu. Toteż prace odsyłające tylko do tablic nie zostały uznane za rozwiązania zadania.

Zadanie 142 [Pola wielokątów o brzegach złożonych z kolejno prostopadłych odcinków jednostkowych] ($WT = 2{,}99$). Odpowiedź: spośród liczb naturalnych tylko 2, 3, 4, 6, 7, 10 nie mogą być takimi polami. Konstrukcja wielokąta o dowolnym polu różnym od wymienionych liczb jest prosta. Jedyna trudność to eliminacja podanych sześciu wartości. Ładnie sobie z tym radzą P. Jędrzejewicz i A. Przeździecki: wystarczy umieścić wielokąt na szachownicy pomalowanej w zwykły sposób, wówczas wszystkie pola przyległe do brzegu wielokąta (od wewnątrz) mają ten sam kolor (np. czarny); jeśli powierzchnia wielokąta jest $\leqslant 10$, to wielokąt zawiera $\leqslant 3$ białe pola, a analiza możliwych usytuowań 3 (lub mniej) białych pól jest już nieskomplikowana. Inne poprawne rozwiązania podali M. Prauza, M. Gałecki, Z. Galias. Ponadto 10 rozwiązań z różnymi lukami.
Autorzy niektórych prac eliminują pracowicie wielokąty o polu 6, po czym piszą, że z liczbami 7 i 10 postępuje się podobnie („... Trzeba rozpatrzeć skończoną, niewielką, liczbę przypadków ..."). Ale to bluff. Istnieje bowiem 4271 nieprzystających wielokątów zbudowanych z 10 kratek (por. R. Hardy *Gry w figury*).

Zadanie 143 [Kwadrat zawierający n rozłącznych kół rozbić na n wypukłych wielokątów zawierających po jednym kole] ($WT = 2{,}86$; $LPR = 12$). Osiem prac to odsyłacze do literatury. Wskazano aż cztery książki, w których zadanie to jest rozwiązane. Nie umieścilibyśmy tego zadania, gdybyśmy byli świadomi jego popularności. Nasza niefrasobliwość.

Zadanie 144 [Równanie $1987y^2 = 1+x+x^2+x^3+x^4$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych] ($WT = 2{,}60$; $LPR = 16$). Kilka interesujących uogólnień: Jeśli liczby naturalne q, m, k spełniają którekolwiek z podanych niżej założeń A, B, C, to równanie $qy^m = 1+x+x^2+\ldots+x^{k-1}$ nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych x, y.
A) (P. Kumor, G. Zwara) $m = 2$, $k = 5$; $q \equiv 2 \pmod 5$.
B) (K. Hryniewiecki) $m = 2$; q, k liczby pierwsze, $q > k > 2$; $q \not\equiv 1 \pmod k$.
C) (A. Przeździecki — dowód z usterką, łatwo naprawialną) $q = p_1^{\alpha_1}\ldots p_r^{\alpha_r}$ rozkład na czynniki pierwsze; α_i niepodzielne przez NWD $(m, k-1)$ dla $i = 1, \ldots, r$; NWD $(k, p_i - 1) =$ NWD $(k, p_i) = 1$ dla pewnego i.

Zadanie 145 [Możliwie duży graf pełny trójkolorowy bez trójkąta jednobarwnego] ($WT = 3{,}13$) było pomyślane jako pewne uzupełnienie zadania **137**. W oznaczeniach użytych w omówieniu zad. 137 mamy nierówność $m_3 \leqslant n_3 = 16$; można więc było próbować konstrukcji co najwyżej szesnastokąta, co też z powodzeniem wykonali: A. Bonk, J. Borkowski, P. Jędrzejewicz, P. Kamiński, Z. Koza, A. Krzysztofowicz, M. Mazur, J. Mikuta, A. Przeździecki, T. Rawlik, G. Zwara. Posiadacze minikomputerów mieli zadanie ułatwione; ale skuteczność takiej metody (i jej wykonalność w rozsądnym czasie) wymagała sprytu w ułożeniu programu. Zaprezentowane przez nas rozwiązanie (6/1987) pokazuje, jak można się było obejść bez pomocy technicznych. Podobne intuicje przekazał nam w ładnym opisie Z. Koza. P. Kamiński wdzięcznie zauważa: siedmiokąt był dany jako ilustracja, a skala ocen jest 10-stopniowa, więc (licząc po 0, 1 p. za każdy wierzchołek) widzimy, że więcej wierzchołków niż 17 być nie może.

Zadanie 147 [Zbieżność szeregu $\sum z_n^{-1}$: $z_n =$ NWW$(x_1, \ldots, x_n)$; $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots$ liczby naturalne] ($WT = 2{,}59$; $LPR = 14$). Oto najbardziej oryginalne rozwiązanie (Dz. Lipniacki): $z_n^n = x_1 \ldots x_n y_1 \ldots y_n$, gdzie $y_j = z_n/x_j$, a skoro $x_1 < \ldots < x_n$, $y_1 > \ldots > y_n$, to $z_n^n \geqslant (n!)^2$, skąd (Stirling) $z_n^{-1} \leqslant (n!)^{-2/n} \approx e^2 n^{-2}$ i $\sum z_n^{-1} < \infty$.
M. Mazur dowodzi tezy wzmocnionej: $\sum n^a z_n^{-1} < \infty$ dla dowolnego $a \in \mathbf{R}$.

Zadanie 148 [Wielościan wypukły W spełnia warunek (*): z każdego wierzchołka wychodzą 3 krawędzie. W szkielet ostrosłupa rozpiętego przez dowolną ścianę W i ustalony punkt $P \in \operatorname{int} W$ można wpisać kulę $\Rightarrow$ w szkielet W można wpisać kulę. Pytanie poza konkursem: czy założenie (*) jest istotne?] ($WT = 2{,}46$; $LPR = 14$). Na pytanie pozakonkursowe odpowiedział jedynie pan Henryk Kasprzak: Istotność założenia (*) pokazuje przykład sześciościanu otrzymanego przez złączenie podstawami dwóch jednakowych ostrosłupów prawidłowych trójkątnych $ABCD$ i $ABCE$ o krawędzi podstawy a i wysokości h; punkt P jest środkiem trójkąta ABC. Gdy $h = (\sqrt{3}-1)a/4$, istnieje kula wpisana w szkielet ostrosłupa $BCDP$ (i pozostałych pięciu przystających ostrosłupów); natomiast kula wpisana w szkielet sześciościanu $EABCD$ istnieje tylko dla $h = a/3$.

Zadanie 149 [W wielokącie wypukłym: średnia długość przekątnej > średnia długość boku] ($WT = 2{,}48$; $LPR = 30$). Z. Koza zauważa, że jeśli w wielokącie wypukłym $A_1A_2 \ldots A_n$ (numeracja cykliczna modulo n) przyjmiemy $S_k = \sum_i A_iA_{i+k}$, otrzymamy nierówności $S_1 < S_2 < \ldots < S_m$, gdzie $m = [n/2]-1$; jest to pewne wzmocnienie tezy zadania.

Omówienie wybranych zadań ligi fizycznej

Zadanie 32 [Informacje o dnie oceanicznym na podstawie kształtu powierzchni oceanu] ($WT = 3{,}31$). Dobre rozwiązania tylko P. Bały i Dz. Lipniackiego.

Zadanie 34 [Kształt toru Księżyca] ($WT = 3{,}80$). Tylko jedno dobre rozwiązanie — J. Lipkowskiego, który nadesłał zadanie bardzo zbliżone (co prawda, już po skierowaniu numeru 9/1986 do druku).

Zadanie 35 [Równowaga belki na walcu] ($WT = 2{,}20$; $LPR = 16$). Dużo poprawnych rozwiązań podobnych do rozwiązania z *Delty*. J. Lipkowski, Dz. Lipniacki, B. Musiał, P. Perkowski, L. Szalast badali trwałość równowagi analizując energię potencjalną jako funkcję kąta odchylenia belki od poziomu.

Zadanie 38 [Wypadkowa pojemność nieskończonego łańcucha kondensatorów] ($WT = 1{,}58$; $LPR = 21$). Zb. Galias, R. Leśniak, Dz. Lipniacki, B. Mikielewicz zastosowali ciąg rekurencyjny.

Zadanie 40 [Zmiana długości roku związana z wypromieniowywaniem energii przez Słońce] ($WT = 2{,}88$). Dobrze rozwiązali tylko R. Repucha, Dz. Lipniacki, A. Sikorski, W. Klimala. Większość rozwiązujących przyjmowała niesłusznie stały promień orbity Ziemi.

Zadanie 41 [Fotografia brzegu jeziora] ($WT = 2{,}12$; $LPR = 19$). Większość rozwiązań poprawna, chociaż niedokładny rysunek ilustrujący zadanie nastręczył niektórym problemy.

Zadanie 42 [Wyznaczanie wartości oporu w sieci] ($WT = 2{,}84$; $LPR = 11$). J. Lipkowski, T. Rawlik, P. Wach wprowadzili przewodności (odwrotności oporów), co ładnie uprościło rachunki. Końcowy wzór: $1/R_x = G_x = 1/2(G_1 + G_2 + G_3)$; we wzorze na R_x występuje odpowiednio czynnik 2 (a nie 1/2, jak wydrukowano w *Delcie*).

Zadanie 44 [Hamowanie satelity] ($WT = 3{,}39$). W. Klimala zauważył, że moc działającej na satelitę siły oporu powietrza równa się pochodnej czasowej całkowitej energii (kinetycznej i potencjalnej) satelity i ładnie to wykorzystał. P. Bała i Dz. Lipniacki rozpatrywali ruch satelity w układzie biegunowym związanym z Ziemią. Autorem czwartego poprawnego rozwiązania jest P. Wach.

Zadanie 46 [Rzut z poślizgiem po lodzie] ($WT = 2{,}43$; $LPR = 10$). Nikt nie całkował siły tarcia w procesie zderzenia woreczka z lodem — przyjmowano siłę nacisku jako równą ciężarowi. W związku z tym nadesłane wartości kąta rzutu są znacznie zawyżone, co jednak (na szczęście) nie obniża istotnie całkowitego zasięgu rzutu. Najlepsze rozwiązania Dz. Lipniackiego i R. Musiała.

Zadanie 47 [Temperatura włókna żarówki przy podwyższonym napięciu] ($WT = 1{,}52$; $LPR = 20$). Zadanie to okazało się najłatwiejsze (najniższa wartość WT). Paradoksalnie rozwiązanie w *Delcie* 8/1987 zawiera błąd w przekształceniach. Poprawna zależność temperatury i napięcia: $T^{2,6} \simeq U$, $T(4{,}5\ \mathrm{V}) = 2200$ K, $U(T_{topn.\ w}) = 17$ V.

Zadanie 48 [Kierunkowość słyszenia w funkcji częstotliwości] ($WT = 2{,}85$). Dobre wyjaśnienie tylko: A. Gluza, J. Lipkowski, L. Szalast, P. Bała, P. Wach, Dz. Lipniacki, M. Bogacz.

Zadanie 49 [Wspinanie się po drabince sznurowej zawieszonej na bloku] ($WT = 2{,}48$; $LPR = 9$). Układ równoważny, taki jak w rozwiązaniu zamieszczonym w *Delcie*, zastosowali P. Koczyński i L. Szalast. Inni (R. Musiał, B. Mikielewicz, J. Lipkowski, J. Stelmach) skorzystali z zasady zachowania pędu, sprowadzając w sposób ukryty rozważany układ do takiego samego układu równoważnego. Równania ruchu rozwiązywali Dz. Lipniacki (dokładnie) i A. Surma (z założeniem stałej wartości przyspieszenia). K. Zawisławski rozpatrywał przesunięcia środków masy po obu stronach bloku wykorzystując fakt, że przemieszczenia drabinki jest co do wartości równe przemieszczeniu przeciwwagi. W kilku rozwiązaniach pojawiło się powołanie na zasadę zachowania energii. Pomimo bezpodstawności tej metody (człowiek wykonuje pracę) uzyskiwano przypadkowo dobry wynik.

Zadania z matematyki nr 163, 164

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 1988

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

163. Do wnętrza kwadratu wpada przez punkt narożny promień świetlny, który następnie biegnie odbijając się od boków kwadratu zgodnie ze zwykłą regułą (kąt padania równa się kątowi odbicia). Gdy promień trafi w wierzchołek, opuszcza kwadrat. Udowodnić, że promień nie wyjdzie z kwadratu przez punkt wejścia. Czy analogiczne stwierdzenie jest słuszne dla dowolnego równoległoboku? Dla prostokąta? Dla rombu?

164. Dowieść, że wszystkie liczby postaci $44^{44^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{44}}}}}$, gdzie liczba 44 występuje więcej niż 44 razy, mają taką samą końcówkę 44-cyfrową.

Zadanie **164** zaproponował pan Jarosław Wróblewski z Wrocławia.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 9/1987

Przypominamy treść zadań:

155. Wyznaczyć kres górny funkcji $f(x) = 2^{-x} + 2^{-1/x}$ na zbiorze liczb dodatnich.

156. Czy dla każdej liczby naturalnej k istnieje wielościan wypukły mający dokładnie k przekątnych (przecinających jego wnętrze)?

155. Z symetrii $f(x) = f(1/x)$ wynika, że $s = \sup\limits_{(0,\infty)} f = \sup\limits_{(0,1]} f$. Ponieważ $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = 1 = f(1)$, a f jest ciągła (nawet różniczkowalna), zatem $s \geqslant 1$ oraz istnieje punkt $z \in (0,1]$ taki, że $s = f(z)$. Przypuśćmy, że $s > 1$. Wobec tego $z \in (0, 1)$, $f(z) = \max\limits_{(0,1)} f$, więc $f'(z) = 0$. Ostatnia równość jest równoważna temu, że $2^{-1/z} = z^2 2^{-z}$. Stąd $1 < f(z) = 2^{-z} + 2^{-1/z} = (1+z^2)2^{-z}$, czyli $1+z^2-2^z > 0$. Różniczkując dwukrotnie funkcję $g(x) = 1+x^2-2^x$ stwierdzamy, że jest ona wypukła na przedziale $[0,1]$, więc swoją wartość maksymalną na tym przedziale przyjmuje w jednym z jego końców. Ale $g(0) = 0 = g(1)$, czyli $g \leqslant 0$ na $[0,1]$, wbrew poprzedniej konkluzji ($g(z) > 0$). Sprzeczność ta obala przypuszczenie, że $s > 1$. Stąd $s = 1$.

156. Tak. Weźmy ostrosłup o wierzchołku Q mający w podstawie $(k+3)$-kąt wypukły $ABCP_1P_2 \ldots P_k$ i odetnijmy od niego czworościan $BKLM$, gdzie K, L, M są punktami leżącymi odpowiednio na krawędziach $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, $\overline{BQ}$. Tylko przekątne $\overline{MP_i}$ ($i = 1, \ldots, k$) przecinają wnętrze otrzymanego wielościanu.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 M**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 151 ($WT = 2{,}66$) i 152 ($WT = 2{,}03$)

Jerzy Janowicz	— Bolesławiec	5—48,44
Grzegorz Zakrzewski	— Trzcianka	46,60
Sławomir Solecki	— Ostrów Wkp.	1—46,53
Piotr Kumor	— Olsztyn	43,99
Marcin Mazur	— Białystok	2—43,56
Marian Roman	— Ełk	1—43,09
Jan Ciach	— Ostrowiec Św.	1—42,66
Andrzej Sudoł	— Nowy Sącz	42,56
Mirosław Mikucki	— Augustów	41,17
Edward Orzechowski	— Warszawa	2—41,15
Tadeusz Józefczyk	— Poznań	1—41,10
Grzegorz Kuś	— Kraków	39,93
Piotr Wach	— Katowice	39,08
Krzysztof Jedziniak	— Katowice	1—37,28
Zygmunt Bartkowski	— Warszawa	36,49
Adam Ruszel	— Krosno	35,57
Konrad Pióro	— Warszawa	34,68
Wojciech Krzyżański	— Żywiec	34,45
Jerzy Małopolski	— Kraków	1—34,05
Artur Smolczyk	— Tarnów Op.	1—33,68
Marek Gałecki	— Milanówek	5—33,44
Jerzy Tyszkiewicz	— Warszawa	33,28
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	32,71
Mariusz Łopusiewicz	— Legnica	32,15
Piotr Figurny	— Lubartów	1—31,39
Krzysztof Jakubczak	— Kudowa Zdrój	31,00
Dariusz Kowalczyk	— Warszawa	29,81
Krzysztof Hryniewiecki	— Białystok	29,75
Andrzej Krzysztofowicz	— Gdańsk	29,66
Władysław Wasiak	— Toruń	28,92
Józef Siwy	— Łaziska G.	1—28,64
Jarosław Kaczyński	— Starogard Gd.	28,31
Stanisław Dorosz	— Kraków	28,06
Kazimierz Serbin	— Sanok	2—27,97
Zbigniew Galias	— Kraków	1—27,90
Maciej Głuszek	— Wrocław	27,85
Janusz Prajs	— Opole	27,57
Mirosław Matlęga	— Skoczów	27,03
Tomasz Komorowski	— Świdnik	2—26,82
Jerzy Cisło	— Wrocław	26,56
Radosław Zapert	— Kielce	26,51
Paweł Kubit	— Krosno	25,85
Dariusz Rybacki	— Kraśnik	25,45
Adam Przeździecki	— Warszawa	25,44
Krzysztof Zygan	— Lubin	24,98
Adam Stadler	— Rzeszów	24,94
Zbigniew Kryłow	— Sopot	24,93
Tomasz Masłowski	— Toruń	24,40
Krzysztof Trautman	— Warszawa	1—24,31
Adam Wyrwa	— Nowy Wiśnicz	1—23,43
Lech Bartłomiejczyk	— Gliwice	22,50
Ryszard Pagacz	— Zawadzkie	2—22,16
Zbigniew Surduka	— Lachowice	20,78
Anna Gluza	— Toruń	1—20,69
Małgorzata Czerniakowska	— Gdańsk	1—20,54
Andrzej Pawłowski	— Zabrze	3—20,28

Legenda (przykładowo): stan konta 3 — 20,28 oznacza, że uczestnik już trzykrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (czwartej) rundzie ma 20,28 p.

Panu Jerzemu Janowiczowi gratulujemy ukończenia szóstej rundy!

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 20 punktów. Pozostali członkowie **Klubu 44 M** (alfabetycznie) (cyfra w nawiasie wskazuje, ile razy uczestnik przekroczył barierę 44 punktów): Z. Bartold (2), T. Biegański (1), A. Bonk (2), W. Boratyński (1), M. Fiszer (1), K. Jachacy (1), P. Jędrzejewicz (2), P. Kamiński (5), Z. Koza (2), D. Kurpiel (2), J. Mańdziuk (1), M. Marczak (1), R. Mazurek (1), H. Mikołajczak (1), J. Mikuta (2), J. Milczarek (1), R. Mitraszewski (1), W. Olszewski (1), M. Prauza (2), T. Rawlik (3), D. Sowizdrzał (3), T. Szymczyk (1), W. Szymczyk (1), J. Uryga (4), K. Witek (1), Z. Zaus (1), K. Zawisławski (1).

Klub 44 M liczy 50 członków.

Lista uczestników ligi zadaniowej **Klub 44 F**

po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 49 ($WT = 2{,}48$) i 50 ($WT = 2{,}88$)

Jerzy Lipkowski	— Elbląg	45,40
Jacek Stelmach	— Zabrze	43,31
Piotr Wach	— Kraków	39,46
Leszek Szalast	— Radzyń Podlaski	39,20
Zbigniew Galias	— Kraków	30,98
Bogusław Mikielewicz	— Brodnica	29,19
Dzierżysław Lipniacki	— Lublin	1—24,22
Paweł Rogocz	— Legnica	23,63
Janusz Osada	— Legnica	22,55
Andrzej Eilmes	— Gorlice	20,82
Maciej Stasiak	— Człuchów	18,73
Tomasz Rusin	— Warszawa	16,60
Andrzej Bonk	— Chełmża	16,34
Piotr Koczyński	— Warszawa	15,37
Wiesław Kacprzak	— Kraków	15,23
Mirosław Semla	— Opole	15,20
Wiesław Stochmal	— Szczecin	11,88
Zbigniew Lipowczan	— Katowice	11,81
Roman Musiał	— Katowice	11,46
Włodzimierz Pszczółkowski	— Poznań	10,24
Mariusz Surma	— Kielce	10,18
Adam Sikorski	— Lublin	10,17
Piotr Dziembaj	— Kraków	10,05
Aleksander Surma	— Myszków	1—10,01
Piotr Bała	— Toruń	2— 6,69
Tomasz Rawlik	— Gliwice	1— 6,32
Robert Repucha	— Gołdap	1— 3,83
Anna Gluza	— Toruń	1— 0,11

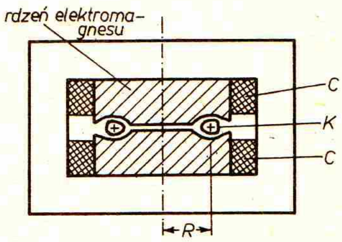
Pan Lipkowski został siódmym członkiem **Klubu 44 F**.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników, którzy zgromadzili co najmniej 10 punktów, a także członków **Klubu 44 F** mających aktualnie na koncie mniej niż 10 punktów, ale wykonujących już drugą lub trzecią rundę. Cyfra przed kreską oznacza, ile razy uczestnik zdobył już **44** punkty.

Zadania z fizyki nr 61 i 62

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

61. Rysunek przedstawia przekrój betatronu — akceleratora kołowego, w którym elektrony ulegają rozpędzaniu na orbicie kołowej (wewnątrz toroidalnej komory K) wskutek istnienia wirowego pola elektrycznego indukowanego przez zmienny w czasie strumień indukcji magnetycznej wewnątrz orbity.



Prąd płynący w cewkach C, narastając od zera do pewnej wartości, wytwarza rosnące z czasem pole magnetyczne, zarówno wewnątrz orbity elektronów, jak i w obszarze tej orbity — dzięki czemu na elektrony działa odpowiednia siła dośrodkowa. Jaki powinien być stosunek średniej wartości wektora indukcji magnetycznej B wewnątrz orbity o promieniu R do wartości wektora B w miejscu tej orbity, czyli w odległości R od osi betatronu, ażeby orbita ta była orbitą stacjonarną, to jest taką, po której elektron może krążyć wiele razy bez zmiany promienia swego toru? Zakładamy zerowe pole magnetyczne oraz zerową prędkość elektronów na początku cyklu.

62. W rurze szybu naftowego może się pojawić gaz pochodzący ze złoża. Wyobraźmy sobie, że zarówno dolny, jak i górny koniec rury zostały szczelnie zamknięte (zablokowane) i w takiej sytuacji porcja gazu z dna wypływa ku górze. Jak wpłynie to na ciśnienie panujące wewnątrz rury? Dokonać obliczeń dla szybu o głębokości 2000 m i przedyskutować zjawiska towarzyszące.

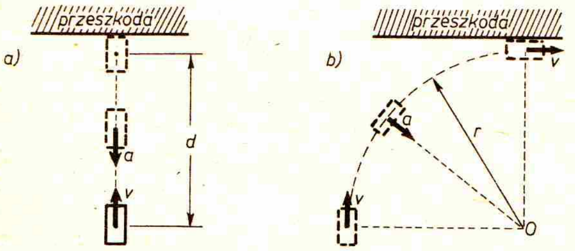
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 9/1987

Przypominamy treść zadań:

53. Kierowca samochodu pędzącego po poziomej, suchej płycie lotniska nagle zauważył przeszkodę ustawioną prostopadle do kierunku jazdy. Jaki manewr — hamowanie czy skręt — daje większą szansę uniknięcia zderzenia z przeszkodą? Zakładamy, że nawierzchnia lotniska ma jednakowe własności w całym obszarze manewru, a przeszkoda jest szeroka.

54. Wyobraźmy sobie, że opanowano technikę superdrobnego druku, odczytywanego za pomocą mikroskopu elektronowego. Jakim kryteriom powinien odpowiadać materiał użyty jako „farba drukarska" nanoszona na podłoże przenikliwe dla elektronów, aby zapewnić trwałość zapisu i dobrą jakość obrazu? Ocenić, jaką najmniejszą wielkość mogłaby mieć reprodukcja całości zbiorów biblioteki liczącej 1 milion książek, średnio po 400 stron. W jaki ewentualnie sposób można by informację zawartą w tych książkach zapisać na jeszcze mniejszej powierzchni?

53. Rozpatrujemy przypadek (a) hamowania ze stałym przyspieszeniem a skierowanym wzdłuż toru oraz przypadek (b) ruchu po łuku okręgu ze stałym przyspieszeniem dośrodkowym a_r oraz ze stałą prędkością. Przy założeniu, że w obu przypadkach siła wywołująca przyspieszenie jest równa maksymalnej sile tarcia opon o nawierzchnię (bez poślizgu), mamy $a = a_r = fg$



(f — współczynnik tarcia statycznego opon o nawierzchnię, g — przyspieszenie ziemskie). Przyjmując początkową prędkość samochodu równą v, obliczamy drogę samochodu do zatrzymania w przypadku (a) $d = v^2/2fg$ oraz promień skrętu w przypadku (b) $r = v^2/fg$. Z porównania wynika $r = 2d$, co oznacza, że hamowanie jest skuteczniejszą metodą uniknięcia zderzenia.

54. Zakładamy, że nasza reprodukcja jest odczytywana za pomocą prześwietleniowego (transmisyjnego) mikroskopu elektronowego. „Farba drukarska", nanoszona na podłoże dobrze przepuszczające elektrony, powinna być mało przenikliwa dla elektronów, aby zapewnić należyty kontrast obrazu. Najmniej przenikliwe dla elektronów są ciężkie metale. Trwałość zapisu oznacza trwałość wiązań między atomami, z których składa się warstwa „farby". Wiadomo, że im silniejsze wiązania, tym wyższa temperatura topnienia danej substancji. Spośród ciężkich metali kilka ma bardzo wysoką temperaturę topnienia, powinny więc one dobrze się nadawać do omawianego celu.

W prześwietleniowym mikroskopie elektronowym osiąga się bez większego trudu zdolność rozdzielczą 1 nm. Przyjmując, że zdolność rozdzielcza obrazu — w skali naturalnej — ma wynosić 0,1 mm, otrzymujemy powiększenie liniowe 10^5. Powierzchnia reprodukcji może więc być 10^{10} razy mniejsza od powierzchni reprodukowanej. Dla biblioteki liczącej 4×10^8 stron odpowiada to powierzchni 0,04 strony. Przy przeciętnym polu powierzchni strony równym 400 cm^2 reprodukcja całości zbiorów bibliotecznych powinna się zmieścić w formacie 4 cm × 4 cm. Informację zawartą w tekście można by zapisać w jeszcze bardziej skondensowanej formie, korzystając z kodu binarnego. Każdą literę, a także inne symbole, można wyrazić za pomocą np. ośmiu bitów (powszechnie stosowany system w informatyce) — daje to możliwość zakodowania $2^8 = 256$ różnych znaków. W ten sposób zapis każdego znaku, zamiast kilkuset punktów obrazu, zajmowałby tylko osiem punktów (czarnych lub białych), a łączna powierzchnia zapisu nie przekraczałaby 1 cm^2.

Zadania

Redaguje (w tym numerze wyjątkowo) dr Marcin E. KUCZMA

M 493. W pewnym zbiorze X określone są dwie relacje Q i R. Zakładamy, że R jest symetryczna, Q i R są przechodnie, oraz że dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi xRy lub xQy. Udowodnić, że R lub Q jest relacją pełną (tj. wiążącą wszystkie pary elementów zbioru X).
Rozwiązanie na str. 5

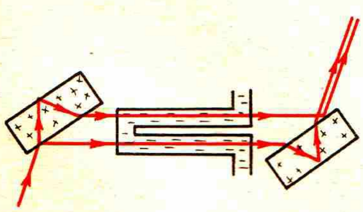
M 494. W trójkącie ostrokątnym T promienie kół opisanego i wpisanego mają długość odpowiednio R i r. Niech T' będzie trójkątem, którego wierzchołkami są spodki wysokości trójkąta T. Obwody trójkątów T i T' są odpowiednio $2p$ i $2p'$. Dowieść, że $p'/p = r/R$.
Rozwiązanie na str. 4

M 495. Czy istnieją wielomiany P, Q, R trzech zmiennych (x, y, z) spełniające tożsamościowo równość

$$(x-y+1)^5P(x, y, z)+(y-z-1)^5Q(x, y, z)+(z-x+1)^5R(x, y, z) = 1?$$

Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI



F 236. Rozpatrzmy doświadczenie Fizeau (patrz rysunek) pomiaru prędkości światła w poruszającej się wodzie. Woda znajduje się w rurach o długości $l = 6$ m i porusza się z prędkością $u = 5{,}5$ m/s. Współczynnik załamania wody dla zielonej linii rtęci ($\lambda_0 = 546$ nm) jest równy 1,3345. W doświadczeniu rejestruje się położenie centralnego prążka interferencyjnego promieni (na rysunku oznaczonych 2 i 3) dla dowolnego kierunku ruchu cieczy, a następnie zmienia się ten kierunek na przeciwny i znajduje się nowe położenie tego prążka. Znaleźć zależność obserwowanego przesunięcia od odległości między prążkami. Efekt Dopplera można zaniedbać.
Rozwiązanie na str. 7

F 237. Czy efekt Dopplera zaniedbany w zadaniu **F 236** ma istotne znaczenie, jeśli okazuje się, że położenie prążków może być określone z dokładnością do 0,01 odległości między nimi? Obliczyć nowe położenie prążków interferencyjnych uwzględniając efekt Dopplera. Współczynnik załamania wody $n = 1{,}333$ dla $\lambda_0 = 589$ nm.
Rozwiązanie na str. 11