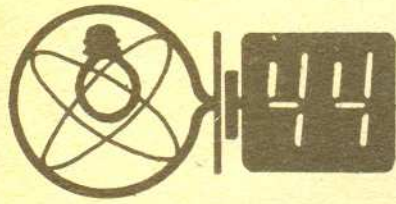


Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 1988

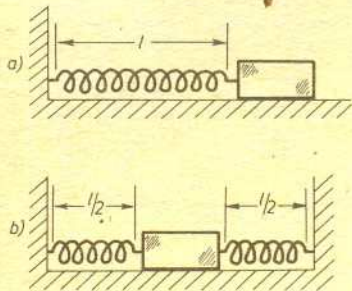


Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: Klub 44 M lub Klub 44 F. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem Klubu 44, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł Weterana. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Zadania z fizyki nr 59 i 60

Redaguje dr Andrzej NADOLNY



59. Rysunek przedstawia dwa układy drgające (a) i (b) z klockiem poruszającym się pod wpływem działania sprężyny (sprężyn) po poziomej prostej. W układzie (b) zastosowano sprężynę z układu (a) — o długości swobodnej l , rozciętą na dwie jednakowe części. Obliczyć stosunek częstotliwości drgań swobodnych tych układów przy założeniu, że masy klocków są jednakowe. Masę sprężyn oraz tarcie klocków o podłoże należy zaniedbać.

Czy wynik zmieni się i jak, jeśli sprężyna zostanie rozciętą na dwie niejednakowe części?

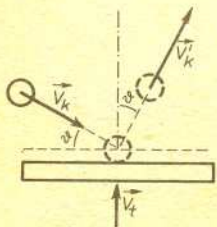
60. Rozpatrzmy nieskończony solenoid o średnicy D i n zwojach na jednostkę długości, przez który płynie prąd o natężeniu I . We wnętrzu solenoidu znajduje się walcowy rdzeń o średnicy d i przenikalności magnetycznej μ . Znaleźć natężenie pola magnetycznego wewnątrz rdzenia oraz w obszarze wewnątrz solenoidu, poza rdzeniem. Porównać tę ostatnią wielkość z natężeniem pola magnetycznego wewnątrz solenoidu bez rdzenia. Przeprowadzić jakościowe porównanie z przypadkiem skończonej długości solenoidu i rdzenia.

Zadanie 59 nadesłał pan Jerzy Lipkowski z Elbląga.

Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 8/1987

Przypominamy treść zadań:

51. Sprężysta kula pada na idealnie gładką tarczę pod kątem θ z prędkością v_k . Przyjmując doskonale sprężyste odbicie kuli od tarczy, obliczyć prędkość v_t , jaką winna mieć tarcza w chwili zderzenia, aby tor kuli po odbiciu tworzył kąt prosty z kierunkiem padania.



52. Wiadomo, że różnoimienne ładunki na okładkach kondensatora są co do wartości równe. Co by się działo, gdyby ładunek jednej z okładek był nieco większy, na przykład o 1%, od ładunku drugiej okładki? Przeanalizować sytuację na przykładzie kondensatora o pojemności $10 \mu\text{F}$ naładowanego do napięcia 10 V .

51. Rozłóżmy prędkość kuli na składowe — równoległą i prostopadłą do powierzchni tarczy:

$$v = v_k \cos \theta, \quad v_{\perp} = v_k \sin \theta.$$

Składowa równoległa v_{\parallel} nie ulega zmianie podczas zderzenia, natomiast składowa prostopadła prędkości po zderzeniu będzie równa

$$v'_{\perp} = -v_{\perp} - 2v_t$$

($v_t > 0$, gdy prędkość tarczy ma zwrot taki, jak na rysunku, $v_t < 0$ w przeciwnym przypadku). Warunek prostopadłości wektorów v_k i v'_k ma postać:

$$\frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} = -\frac{v'_{\perp}}{v'_{\parallel}}$$

Z powyższych wzorów wyznaczamy poszukiwaną prędkość tarczy:

$$v_t = \frac{v_k(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)}{2 \sin \theta}$$

W związku z założeniem o idealnie gładkiej tarczy (brak tarcia) ruch obrotowy kuli nie wymaga uwzględnienia.

52. Niech ładunek jednej z okładek będzie $-Q$, natomiast drugiej $Q + \Delta Q$. Możemy to opisać też w taki sposób: okładki mają odpowiednio ładunki $-Q - \Delta Q/2$ oraz $Q + \Delta Q/2$, a ponadto kondensator jako całość jest naładowany ładunkiem ΔQ . Napięcie panujące między okładkami

wynosi $U_1 = \frac{Q + \Delta Q/2}{C_1} \approx \frac{Q}{C_1}$, gdzie C_1 jest pojemnością kondensatora.

Natomiast między kondensatorem a Ziemią wystąpi napięcie $U_2 = \frac{\Delta Q}{C_2}$, gdzie C_2 oznacza

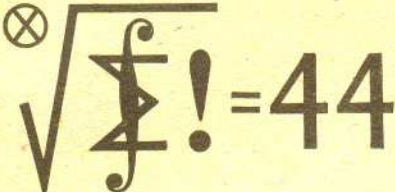
pojemność między kondensatorem a Ziemią. Podstawiając dane — $C_1 = 10 \mu\text{F}$, $U_1 = 10 \text{ V}$, $\Delta Q = 0,01 Q$ oraz $C_2 = 1 \text{ pF}$ (dość typowa wartość dla niewielkiego kondensatora umieszczonego wewnątrz uziemionego pudełka), uzyskujemy $U_2 = 1 \text{ MV}$ (!).

Rozwiązanie zadania M 490, Mamy

$$\begin{aligned} h(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot P(X+Y = k) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \cdot \sum_{j=0}^k P(X = j, Y = k-j) = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k s^k \cdot P(X = j) \cdot P(Y = k-j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} s^k \cdot P(X = j) \cdot s^{k-j} \cdot P(Y = k-j) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} s^j \cdot P(X = j) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} s^m \cdot P(Y = m) = \\ &= f(s) \cdot g(s). \end{aligned}$$

Powyższe rozumowanie jest słuszne, o ile $|s| \leq 1$; mamy wtedy do czynienia z szeregami bezwzględnie zbieżnymi i dopuszczalna jest zmiana kolejności sumowania.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA



161. Zaproponować określenie jednego działania (dwuargumentowego) w zbiorze liczb rzeczywistych, za pomocą którego można (z użyciem liczb 0 i 1) wyrazić cztery działania arytmetyczne (+, -, ·, :).

[Powiedzmy, że nowe działanie oznaczyliśmy symbolem *. Mówiąc, na przykład, że dodawanie wyraża się przez * rozumiemy tu, że spełniona jest tożsamościowo równość postaci

$$a + b = \begin{cases} A \text{ jeśli } P \\ B \text{ jeśli } Q \\ \dots\dots\dots \\ H \text{ jeśli } W \end{cases}$$

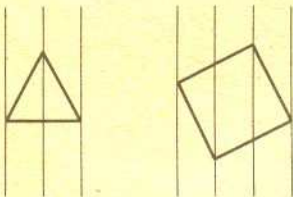
gdzie: liczba wierszy objętych klamerką jest skończona, każda z liter A, B, ..., H oznacza napis składający się wyłącznie ze znaków a, b, 0, 1, *, (,), formalnie sensowny przy operowaniu nawiasami w zwykły sposób, a P, Q, ..., W są warunkami zapisanymi przy użyciu tych samych symboli oraz znaków =, ≠ (lub koniunkcjami warunków tego typu.)

162. Wyznaczyć wszystkie pary m, n liczb całkowitych nieujemnych takie, że liczby $\sqrt{m+\sqrt{n}}$ oraz $\sqrt{n+\sqrt{m}}$ są obie całkowite.

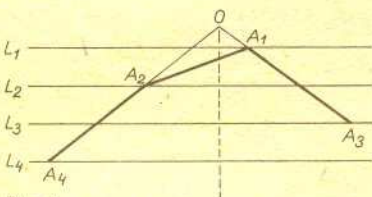
Zadanie 162 przysłał pan Jerzy Janowicz z Bolesławca.

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 8/1987

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2

153. Czy ciąg (a(n)) określony przez warunki $a(2k)^r = a(k)$, $a(4k+1) = 1$, $a(4k+3) = 0$ jest od pewnego miejsca okresowy?

154. Dla jakich n ≥ 3 można przez wierzchołki n-kąta foremnego poprowadzić n prostych równoległych w równych odstępach?

153. Odpowiedź: nie. Przypuśćmy, że T jest okresem, $T = 2^p q$, $p \geq 0$, q nieparzyste. Ponieważ także 3T jest okresem, możemy bez straty ogólności przyjąć, że $q = 4k + 3$. Z danych założeń wynikają równości $a(2^{p+2^r}) = a(2^{p+2^r-1}) = \dots = a(2) = a(1) = 1$, $a(2^{p+2^r} + T) = a(2^{p+2^r} + 2^p(4k+3)) = a(2^p(4^r + 4k+3)) = a(4^r + 4k+3) = 0$ dla $r = 1, 2, \dots$, wbrew przypuszczeniu, że $a(n+T) = a(n)$ dla dużych n.

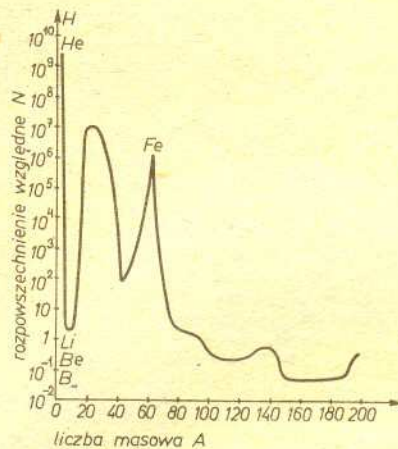
154. Dla $n = 3, n = 4$ jest to możliwe (rysunek 1), dla $n \geq 5$ — nie. Przypuśćmy bowiem, że umieściliśmy wierzchołki n-kąta foremnego ($n \geq 5$) na prostych równoległych ponumerowanych kolejno L_1, \dots, L_n (L_i sąsiaduje z L_{i+1}). Niech A_i będzie wierzchołkiem leżącym na L_i . Punkty A_1 i A_2 muszą być sąsiednimi wierzchołkami wielokąta (inaczej mielibyśmy wierzchołki w pasie między L_1 a L_2). Podobnie stwierdzamy, że A_3 i A_4 muszą sąsiadować z bokiem A_1A_2 , przy czym A_3 sąsiaduje z A_1 , a A_4 z A_2 (bo gdyby A_3 sąsiadował z A_2 , odcinek A_2A_3 byłby przedłużeniem A_1A_2). Tak więc łamana $A_3A_1A_2A_4$ jest fragmentem obwodu rozpatrywanego wielokąta (rysunek 2). Ponieważ $n \geq 5$, proste A_1A_3 i A_2A_4 przecinają się w punkcie O leżącym po przeciwnej stronie prostej L_1 niż wielokąt. Weźmy pod uwagę pas płaszczyzny ograniczony prostymi L_1 i L_3 oraz pas ograniczony prostymi L_2 i L_4 . Pasy te mają jednakową szerokość, a przy tym wyznaczają na ramionach kąta A_3OA_4 odcinki równej długości ($A_1A_3 = A_2A_4$); przecinają więc te ramiona pod jednakowym kątem. Kierunek prostych L_i jest więc prostopadły do dwusiecznej kąta A_3OA_4 . Stąd już wynika, że $|\sphericalangle A_3A_1A_2| < |\sphericalangle A_1A_2A_4|$, wbrew temu, że wielokąt jest foremny.

Oto jeszcze jeden pomysł konstrukcji reaktora termojądrowego.

Jak wiadomo, doprowadzenie do zapłonu małej pastylki zawierającej mieszaninę deuteru i trytu wymaga dostarczenia energii około miliona dżuli do objętości 1 cm³ w ciągu 10 nanosekund. Próbuje się to osiągnąć oświetlając pastylkę światłem kilku laserów lub wiązkami ciężkich jonów. Teoretycznie zapłon mogłoby również spowodować uderzenie niewielkiego pocisku o masie np. 0,1 kg i prędkości 200 km/s. Wzrost ciśnienia oraz temperatury w fali uderzeniowej byłby wtedy wystarczający do zapoczątkowania reakcji syntezy.

Największe prędkości uzyskane za pomocą dział elektrostatycznych nie przekraczają jednak kilkudziesięciu km/s. Dlatego rozważa się możliwość konstrukcji akceleratora magnetycznego, którego wyniki byłyby prawdopodobnie znacznie lepsze. Podstawą jego działania jest zjawisko potocznie zwane lewitacją magnetyczną.

Kula nadprzewodząca umieszczona nad pierścieniem, w którym płynie prąd, może pozostawać w stanie stabilnej równowagi — siły oddziaływania pola magnetycznego prądu w pierścieniu i prądów w kuli równoważą siłę ciężkości. Jeśli pierścień zacznie się poruszać, to kula będzie się poruszała wraz z nim. W praktyce przyspieszenie pocisku uzyskuje się przelazając w odpowiednim tempie prąd od pierścienia do pierścienia. Maksymalną prędkość możliwą do osiągnięcia w akceleratorze o długości 1—2 km szacuje się na 100 km/s. Projekt ten nie doczekał się jeszcze praktycznej realizacji.



Na rysunku przedstawiona jest częstość występowania pierwiastków w znanej nam części Wszechświata w zależności od liczby masowej A. Jak widać, występuje ogromna przewaga jąder wodoru i helu, a więc Wszechświat daleki jest od stanu równowagi, który odpowiadałby przewadze jąder o liczbach masowych bliskich A = 60, tj. jąder okolic żelaza i niklu.