Nierówność

Jak udowodnić, że jeśli liczby p, q są dodatnie oraz $p+q=1$, to dla dowolnych liczb naturalnych $n, m \geq 2$ zachodzi nierówność

$$(1-p^n)^m+(1-q^m)^n > 1?$$

Wystarczy spojrzeć na tę nierówność oczami probabilisty.

W klatkach prostokątnej tablicy o n wierszach i m kolumnach umieszczamy 1 z prawdopodobieństwem p i 0 z prawdopodobieństwem q. Prawdopodobieństwo, że w ustalonym wierszu pojawi się przynajmniej jedna jedynka, jest równe $1-q^m$, a że tak się zdarzy we wszystkich wierszach $(1-q^m)^n$. Analogicznie, prawdopodobieństwo, iż w każdej kolumnie znajdzie się przynajmniej jedno 0, jest równe $(1-p^n)^m$.

Zauważmy teraz, że jeżeli w jakimś wierszu nie ma ani jednej jedynki — są same zera, to w każdej kolumnie jest przynajmniej jedno zero. Tak więc zdarzenie, że każdy wiersz zawiera jedynkę lub każda kolumna zero, jest pewne, czyli

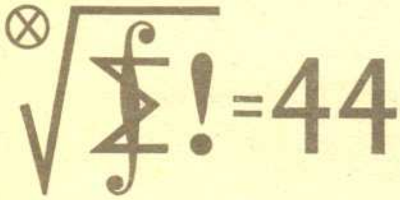
$$(1-p^n)^m+(1-q^m)^n > 1,$$

gdyż $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI

Klub 44

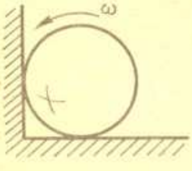
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 1988



Czołówka ligi zadaniowej "Klub 44 M"
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 149 /WT=2,48/ i 150 /WT=1,76/
z numeru 4/1987

Karol Jachacy	- Tłuszcz	46,21pkt
Krzysztof Zawisławski	-Warszawa	45,70pkt
Dariusz Kurpiel	- Zarszyn	44,90pkt
Jerzy Janowicz	- Bolesławiec	43,75pkt
Grzegorz Zakrzewski	- Trzcianka	42,44pkt
Sławomir Solecki	- Ostrów Wkp	41,84pkt
Edward Orzechowski	- Warszawa	41,15pkt
Jan Ciach	- Ostrowiec	40,63pkt

Panowie Jachacy i Zawisławski - to nowe twarze w Klubie 44. Pan Kurpiel - już po raz drugi.



Liga zadaniowa Wydziału Matematyki Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4-3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N — liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) — i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo — to tytuł **Weterana**.
Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1987.

Zadania z matematyki nr 159, 160

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

159. Na płaszczyźnie dany jest zbiór Z złożony z n punktów ($n \geq 3$), przy czym żadne trzy z nich nie są współliniowe. Wykazać, że $|\sphericalangle PQR| \leq 180°/n$ dla pewnej trójki punktów $P, Q, R \in Z$.

160. Ciąg nieskończony (x_n) określony jest wzorem rekurencyjnym $x_{n+2} = \dfrac{2}{x_n+x_{n+1}}$; x_1, x_2 są danymi liczbami dodatnimi. Udowodnić zbieżność tego ciągu.

Zadanie **160** przysłał pan Dzierżysław Lipniacki z Lublina.

Zadania z fizyki nr 57, 58

Redaguje dr Andrzej NADOLNY

57. W narożniku ścian poziomej i pionowej umieszczono jednorodną kulę obracającą się z początkową prędkością kątową ω wokół osi przechodzącej przez jej środek i równoległej do krawędzi narożnika, kierunek obrotów jak na rysunku. Współczynnik tarcia kinetycznego kuli o ściany narożnika wynosi f. Obliczyć czas, jaki upłynie do zatrzymania ruchu obrotowego kuli oraz kąt, o który się w tym czasie kula obróci.

58. Pionowy cylinder, wypełniony powietrzem o ciśnieniu atmosferycznym p_0 i temperaturze T_0, zamknięty jest od góry początkowo unieruchomionym tłokiem o masie m. W połowie wysokości cylindra znajduje się nieruchoma przegroda z małym otworem. W pewnej chwili tłok zostaje zwolniony i opada, dochodząc do przegrody.
Wyznaczyć końcową temperaturę powietrza w cylindrze przy zaniedbaniu tarcia tłoka o ścianki cylindra oraz wymiany ciepła między powietrzem a ściankami cylindra, przegrodą i tłokiem. Jaka byłaby końcowa temperatura powietrza, gdyby otwór w przegrodzie był duży?