Jak znaleźć granicę?

Oto zadanie, które kilkanaście lat temu krążyło po Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego: znaleźć granicę ciągu

$$\sqrt{n}\cdot\underbrace{\sin\ldots\sin}_{n}1.$$

Jakiś czas zadanie nie poddawało się, potem znane były długie i niezbyt zgrabne rozwiązania. Kilka lat temu okazało się, że istnieje naprawdę elegancka metoda.

Potrzebne nam będzie kilka faktów.

1° Twierdzenie o ciągu średnich arytmetycznych:

Jeśli ciąg $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny, to ciąg $\left(\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ też jest zbieżny i to do tej samej granicy.

2° Ze wzoru Taylora dla funkcji sinus wynika, że

$$\lim_{x\to 0} x^{-3}\cdot\left(\sin x - x + \frac{x^3}{3!}\right) = 0.$$

3° Ciąg $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ określony wzorem rekurencyjnym $b_1 = \sin 1$, $b_{n+1} = \sin b_n$ dla $n = 1, 2, \ldots$ jest zbieżny do zera.

Mamy znaleźć granicę ciągu $(b_n\cdot\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$. Zamiast tego będziemy szukać granicy ciągu $\left(\dfrac{1}{b_n^2\cdot n}\right)_{n=1}^{\infty}$. Na mocy 1° wystarczy znaleźć granicę ciągu $(c_n)_{n=1}^{\infty}$, gdzie $c_1 = \dfrac{1}{b_1^2}$, $c_n = \dfrac{1}{b_n^2} - \dfrac{1}{b_{n-1}^2}$ dla $n = 2, 3, \ldots$ Ale

$$c_n = \frac{1}{b_n^2} - \frac{1}{b_{n-1}^2} = \frac{1}{\sin^2 b_{n-1}} - \frac{1}{b_{n-1}^2} = \frac{b_{n-1}^2 - \sin^2 b_{n-1}}{b_{n-1}^2\cdot\sin^2 b_{n-1}}$$

i (na mocy 3°)

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_n^2-\sin^2 b_n}{b_n^2\cdot\sin^2 b_n} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\cdot\sin^2 x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin^2 x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x+\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\left(\frac{-\sin x + x - \dfrac{x^3}{3!}}{x^3} + \frac{x^3}{3!\cdot x^3}\right).$$

Pierwsza z granic po ostatniej równości jest równa 1, druga 2, a trzecia (na mocy 2°) $\dfrac{1}{6}$. Mamy więc

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\cdot b_n^2} = \frac{1}{3},\qquad \text{czyli}\qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\cdot b_n = \sqrt{3}.$$

Warto udowodnić twierdzenie o granicy ciągu średnich arytmetycznych, bywa ono — jak widać z powyższego przykładu — bardzo przydatne.

Niech $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$. Załóżmy, że $|g| < \infty$. Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$ i wybierzmy taką liczbę k, że dla $n > k$ mamy $|a_n - g| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Oszacujmy różnicę $\left|\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} - g\right|$. Otóż

$$\left|\frac{a_1+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_n-ng}{n}\right| \leqslant \frac{|a_1+\ldots+a_k-kg|}{n} + \frac{|a_{k+1}-g|}{n} + \ldots +$$

$$+\frac{|a_n-g|}{n} \leqslant \frac{|a_1+\ldots+a_k-kg|}{n} + \frac{\varepsilon}{2},$$

czyli dla takiego n, że $n > \dfrac{2}{\varepsilon}\cdot|a_1+\ldots a_k - kg|$ i $n > k$ mamy $\left|\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n} - g\right| < \varepsilon$, co kończy dowód.

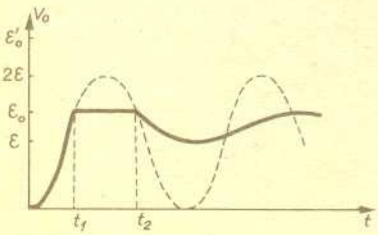
Przypadek, gdy $g = \pm\infty$, pozostawiamy Czytelnikowi.

Czasem przy obliczaniu granic przydaje się twierdzenie Stolza, będące uogólnieniem powyższego twierdzenia:

Jeśli ciąg $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ jest rosnący i nieograniczony, to ze zbieżności ciągu $\dfrac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ wynika zbieżność ciągu $\dfrac{x_n}{y_n}$, przy czym obie granice są równe.

J.R.

Rozwiązanie zadania F 233. W momencie zamykania klucza w obwodzie LC powstają drgania. Stanowi równowagi odpowiada napięcie na kondensatorze $V_c = \mathcal{E}$. Ponieważ w chwili początkowej $V_c = 0$, więc amplituda napięcia jest równa $\mathcal{E}$, a maksymalne napięcie na kondensatorze wynosi $2\mathcal{E}$.



Jeśli $2\mathcal{E} < \mathcal{E}_0$ (patrz rysunek), dioda przestaje przewodzić i w obwodzie zachodzą drgania harmoniczne (linia przerywana na rysunku). Wtedy ładunek nie przepływa przez baterię z SEM $\mathcal{E}_0$. Jeśli natomiast $2\mathcal{E} > \mathcal{E}_0$, to dioda w pewnej chwili t_1, kiedy $V_c = \mathcal{E}_0$, przewodzi i przez baterię o SEM $\mathcal{E}_0$ popłynie prąd. Ponieważ opór diody w momencie przewodzenia jest (w przybliżeniu) równy zeru, więc nie występuje na niej spadek napięcia i w ciągu całego czasu przepływu prądu przez baterię I napięcie na kondensatorze jest równe $\mathcal{E}_0$ (ciągła linia na rysunku). Odpowiednio, do chwili t_2, kiedy dioda przestaje przewodzić, ładunek na kondensatorze wynosi $C\mathcal{E}_0$. Jeśli przy tym przez baterię I przepływał ładunek q_0, to bateria II musiała oddać do obwodu ładunek $q = q_0 + C\mathcal{E}_0$. Praca baterii II poszła na dostarczenie energii do kondensatora i na pracę przeciwko SEM baterii I. Do momentu zatkania diody prąd przez cewkę przepływał z lewej na prawą stronę (porównaj rysunek w treści zadania). Po zamknięciu diody rozpoczyna się rozładowywanie kondensatora i prąd przez cewkę przechodzi w przeciwnym kierunku, tzn. w chwili t_2 prąd przez cewkę zmienia znak, czyli jest równy zeru. Równa zeru jest też energia zgromadzona w indukcyjności L. Zasada zachowania energii w chwili t_2 będzie miała postać: $q\mathcal{E} = q_0\mathcal{E}_0 + C\mathcal{E}_0^2/2$. Rozwiązując to wraz z równaniem $q = q_0 + C\mathcal{E}_0$ otrzymujemy

$$q_0 = C\mathcal{E}_0(2\mathcal{E} - \mathcal{E}_0)/2(\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}).$$

Po zatkaniu diody w obwodzie będą zachodziły drgania z amplitudą $\mathcal{E}_0 - \mathcal{E}$.