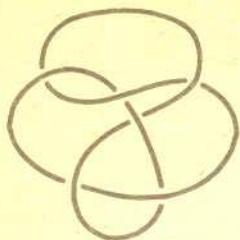
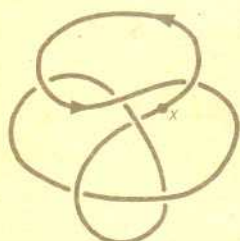


Hipotezy Taita

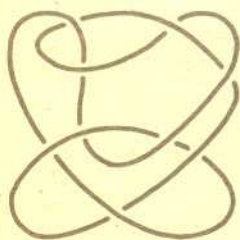
Dr Paweł TRACZYK



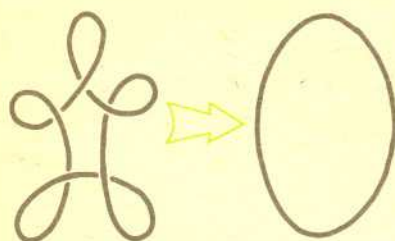
Rys. 1



Rys. 2. Startując z punktu X i poruszając się zgodnie ze strzałkami przechodzimy trzy kolejne skrzyżowania górą.



Rys. 3



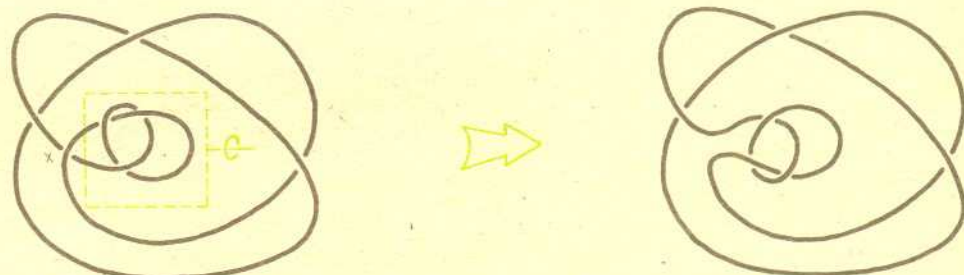
Rys. 4

W ostatnich trzech latach dokonała się prawdziwa rewolucja w teorii węzłów. Poniżej przedstawiamy jedno z najbardziej spektakularnych osiągnięć — pozytywne rozstrzygnięcie tzw. hipotez Taita. Przypomnijmy, że splotem nazywamy pewną liczbę parami rozłącznych okręgów zanurzonych w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej. Splot o jednej składowej nazywamy węzłem. Dwa sploty uważamy za równoważne, gdy można jeden przeprowadzić na drugi bez rozcinania, stopniowo go tylko deformując.

Bardzo poglądowy i najczęściej stosowany sposób przedstawiania splotu polega na podaniu jego diagramu na płaszczyźnie. Jest to rzut splotu na wybraną płaszczyznę, z zaznaczeniem, która z krzyżujących się nitki przechodzi górą, a która dołem. Diagram nazywamy alternującym, jeżeli ma tę własność, że startując z dowolnego miejsca i poruszając się wzdłuż diagramu przechodzimy kolejne skrzyżowania raz górą, raz dołem — na zmianę. Tak na przykład diagram na rysunku 1 jest alternujący, a na rysunku 2 — nie. Istnieją węzły, które w ogóle nie dadzą się przedstawić w postaci diagramu alternującego (rys. 3).

Jest intuicyjnie dość naturalne uważać diagramy alternujące za bardziej zagmatwane niż niealternujące. W teorii węzłów czekało od około stu lat na rozstrzygnięcie kilku hipotez, pochodzących od Taita, nawiązujących do tej intuicji (i do doświadczenia eksperymentatorów zestawiających pierwsze tablice węzłów). Hipotezy te sformułujemy poniżej już jako twierdzenia. Przedtem jednak potrzebna będzie jeszcze jedna definicja.

Diagram alternujący wydaje się wprawdzie na oko mocno spletany, ale jest od tej reguły jedno oczywiste odstępstwo. Otóż np. diagram na rysunku 4 jest jak najbardziej alternujący, a wcale nie jest spletany, przeciwnie, przedstawiony węzeł jest, oczywiście, trywialny. Z kolei diagram na rysunku 5 można łatwo uprościć — wystarczy we wskazany sposób obrócić zawartość zaznaczonego przerywaną linią prostokąta i w ten sposób skasować skrzyżowanie X (zauważmy, że takie uproszczenie przerabia diagram alternujący na diagram w dalszym ciągu alternujący).



Rys. 5

Diagram nazwiemy zredukowanym, jeżeli nie można w nim dokonać żadnego uproszczenia tego typu.

Możemy teraz sformułować zapowiedziane twierdzenia (udowodnione niezależnie przez Murasugiego, Kauffmana i Thistlethwaite'a):

1. Każde dwa zredukowane diagramy alternujące, przedstawiające ten sam węzeł, mają taką samą liczbę skrzyżowań.
2. Zredukowany diagram alternujący ma minimalną liczbę skrzyżowań wśród wszystkich diagramów reprezentujących dany węzeł.

Udowodnienie hipotez Taita zostało przyjęte przez specjalistów od teorii węzłów z wielkim entuzjazmem. Nie tylko dlatego, że poddała się w końcu stara i czcigodna hipoteza, ale również z tego powodu, że poddała się w zasadzie bez walki: w dowodzie są użyte tylko bardzo elementarne metody.

Głównym narzędziem jest tzw. wielomian Kauffmana. Jest to bardzo prosty niezmiennik zorientowanych splotów (tzn. splotów z wyróżnionym kierunkiem obiegu). Jest on zdefiniowany przez podanie przepisu pozwalającego dla dowolnego diagramu zorientowanego splotu obliczyć pewien odpowiadający mu wielomian f zmiennych A i A^{-1} o współczynnikach całkowitych. Przepis ten jest tak sprytnie sporządzony, że dla dwóch diagramów reprezentujących ten sam zorientowany splot otrzymujemy ten sam wielomian, choć diagramy mogą być na oko zupełnie niepodobne (takie właśnie jest znaczenie słowa niezmiennik — wielomian się nie zmienia, jeżeli do obliczeń weźmiemy inny diagram tego samego splotu).

Rozszczepienie skrzyżowań

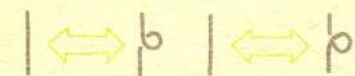


ujemne (idąc od nitki dolnej do górnej w prawo nie napotykamy kreski i rozcięcia),



dodatnie.

Fundamentalne dla teorii węzłów twierdzenie Reidemeistera mówi, że dwa diagramy przedstawiające ten sam spłot mogą być uzyskane jeden z drugiego przez ciąg tzw. ruchów Reidemeistera — prostych, pokazanych poniżej przeróbek diagramów.



(Jak i w wielu innych sytuacjach pokazaliśmy tylko te fragmenty diagramów, które są istotne, fragmenty pominięte mają być po prostu dokładnie takie same dla lewej i prawej strony.)

Oczywiście w twierdzeniu Reidemeistera dopuszcza się oprócz tych trzech typów ruchów także deformacje diagramów, np.



Jak zmienia się nawias Kauffmana, gdy do diagramu dodamy trywialną pętelkę o ujemnym skrzyżowaniu?



Obliczmy

$$\begin{aligned} \langle \text{loop} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = \\ &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle = \\ &= -A^3 \langle \text{loop} \rangle \end{aligned}$$

Natomiast

$$\langle \text{loop} \rangle = -A^3 \langle \text{loop} \rangle$$

A oto przepis.

Najpierw zdefiniujemy tzw. nawias Kauffmana, który każdemu niezorientowanemu diagramowi przyporządkowuje wielomian według następujących reguł:

- $\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle$
- $\langle \text{circle} \rangle = 1$
- $\langle \text{loop} \rangle = (-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle$

W pierwszej równości podany jest związek między wartościami nawiasu Kauffmana dla trzech diagramów, które są identyczne poza fragmentami uwidocznionymi w kółkach zaznaczonych kropkowaną linią, przy czym drugi diagram powstaje przez rozszczepienie dodatnie pierwszego, a trzeci przez ujemne.

Warunek 2 to tzw. warunek normalizacji: trywialnemu diagramowi w postaci jednego zwykłego okręgu odpowiada jedynka.

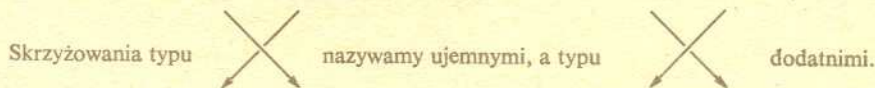
W trzecim warunku rozpatrujemy diagram powstający przez dołączenie do diagramu \mathcal{D} osobno położonego okręgu (na podstawie tego warunku i warunku 2 można łatwo obliczyć nawias Kauffmana dla układu n osobno leżących okręgów — wynosi on $(-A^{-2} - A^2)^{n-1}$). Powyższe warunki pozwalają obliczyć nawias Kauffmana dla dowolnego diagramu. Konfiguracja składająca się z n okręgów, a otrzymana w wyniku wykonania k dodatnich i m ujemnych cięć, wnosi do nawiasu Kauffmana wyjściowego diagramu składnik $A^{k-m}(-A^{-2} - A^2)^{n-1}$.

Rewelacyjną cechą nawiasu Kauffmana jest łatwość udowodnienia, że jest on niezmienniczy ze względu na II i III ruchy Reidemeistera:

$$\begin{aligned} \langle \text{move I} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = A(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) = \\ &= A(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1}(-A^2 - A^2) \langle \text{loop} \rangle) + A^{-1}(A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle) = \\ &= -A^2 \langle \text{loop} \rangle + \langle \text{loop} \rangle + A^2 \langle \text{loop} \rangle = \langle \text{loop} \rangle \\ \langle \text{move II} \rangle &= A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = A \langle \text{loop} \rangle + A^{-1} \langle \text{loop} \rangle = \langle \text{loop} \rangle \end{aligned}$$

Nawias Kauffmana nie jest jednak prawdziwym niezmiennikiem: nie jest niezmienniczy ze względu na I ruch Reidemeistera. Aby usunąć tę niedogodność, wprowadza się następujące udoskonalenie:

Niech \mathcal{K} będzie diagramem zorientowanym.



Przez $w(\mathcal{K})$ oznaczamy sumę znaków skrzyżowań. Definiujemy

$$f(\mathcal{K}) := (-A)^{-3w(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle$$

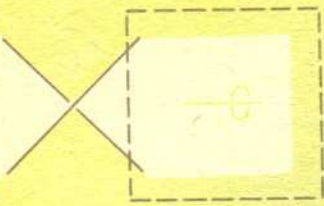
($\langle \mathcal{K} \rangle$ oznacza, oczywiście, nawias Kauffmana diagramu \mathcal{K} bez orientacji). Wielomian f jest już prawdziwym niezmiennikiem: wystarczy sprawdzić niezmienniczość ze względu na I ruch Reidemeistera. I tu okazuje się, że jeśli do diagramu \mathcal{K} dołączymy pętlę o ujemnym skrzyżowaniu, a otrzymany diagram nazwiemy \mathcal{L} , to $f(\mathcal{L}) = (-A)^{-3w(\mathcal{L})} \cdot \langle \mathcal{L} \rangle = (-A)^{-3(w(\mathcal{K})-1)} \cdot (-A)^{-3} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle = (-A)^{-3w(\mathcal{K})} \cdot \langle \mathcal{K} \rangle = f(\mathcal{K})$. Podobnie nie zmienia wartości wielomianu Kauffmana dołączenie pętli o skrzyżowaniu dodatnim.

Pokażemy teraz, jak się dowodzi pierwszej hipotezy Taita. Idea jest bardzo prosta. Okazuje się, że dla zredukowanego diagramu alternującego o s skrzyżowaniach rozpiętość nawiasu Kauffmana (tzn. różnica między najwyższym a najniższym wykładnikiem) jest równa $4s$. Nawias Kauffmana nie jest wprawdzie niezmiennikiem, ale jego rozpiętość jest — bo jest taka sama jak rozpiętość wielomianu f . W takim razie każdy zredukowany diagram alternujący reprezentujący dany węzeł musi mieć taką samą liczbę skrzyżowań (1/4 rozpiętości wielomianu f).

Pozostaje więc udowodnić, że rozpiętość nawiasu Kauffmana jest istotnie równa $4s$. Okazuje się, że można wskazać wprost te końcowe konfiguracje okręgów, z których pochodzą: wyraz w najwyższej potędze i wyraz w najniższej potędze w nawiasie Kauffmana. Jak łatwo się domyślić, najwyższa potęga pochodzi od tej konfiguracji, którą się otrzymuje przez dodatnie rozszczepienie wszystkich skrzyżowań, najniższa — przeciwnie. Żeby się o tym przekonać,



Rys. 6. Kolory zostały rozmieszczone w taki sposób, że każde rozszczepienie dodatnie powoduje połączenie białych obszarów.



Rys. 7. Jeżeli pewien obszar szachownicy styka się ze sobą, to diagram nie jest zredukowany. Możemy obrócić część diagramu zawartą w prostokącie kasując zaznaczone skrzyżowanie.

pokolorujemy obszary, na które nasz diagram dzieli płaszczyznę, w szachownicę, to znaczy, że dwa obszary stykające się wzdłuż linii mają mieć różne kolory, a dwa obszary stykające się narożami mają mieć ten sam kolor. Np. rysunek 6 przedstawia diagram z rysunku 1 pokolorowany w szachownicę. Jeżeli w rozpatrywanym diagramie węzła jest s skrzyżowań, a w naszej szachownicy b pól białych i c pól czarnych, to $s = b + c - 2$. Łatwo to udowodnić przez indukcję względem s . Jeżeli $s = 0$, to oczywiście nasz diagram jest po prostu pojedynczym okręgiem i są dwa obszary, jeden czarny, drugi biały. Zatem $b + c - 2 = 1 + 1 - 2 = 0 = s$. A teraz krok indukcyjny. Weźmy dowolne skrzyżowanie i rozszczepmy je tak, aby uzyskać znowu diagram pewnego węzła (to zawsze jest możliwe; rozszczepiając dowolne skrzyżowanie na dwa możliwe sposoby uzyskujemy raz węzeł, a raz spłot o dwóch składowych). Po takim rozszczepieniu liczba skrzyżowań spada o 1, ale także liczba obszarów zmniejsza się o jeden!

Dla diagramów alternujących sytuacja jest pod pewnym względem szczególna: można rozmieścić kolory w szachownicy tak, aby rozszczepienie dodatnie powodowało zawsze połączenie białych obszarów, a rozszczepienie ujemne połączenie czarnych obszarów (wystarczy dobrze zacząć od jednego skrzyżowania, dalej już wyjdzie samo).

Rozszczepmy wszystkie skrzyżowania w sposób dodatni. Otrzymamy jedno pole białe i — w dalszym ciągu — c pól czarnych — po prostu czarne pola nie miały okazji, żeby się łączyć. W uzyskanej konfiguracji jest więc c okręgów, a jej wkład do nawiasu Kauffmana wyjściowego diagramu wynosi $A^c(-A^{-2}-A^2)^{c-1}$. Najwyższą potęgą zmiennej A w tym wyrażeniu jest $s + 2c - 2$. Pokażemy, że żadna inna końcowa konfiguracja nie może już wnieść zmiennej A w tak wysokiej potęgę. Przyjrzyjmy się najpierw konfiguracjom powstałym przez rozszczepienie $s - 1$ skrzyżowań w sposób dodatni i jednego w sposób ujemny. Otóż w takiej konfiguracji jest jedno białe pole, ale pól czarnych już tylko $c - 1$. (Tutaj korzystamy dwukrotnie z założenia, że diagram jest zredukowany. Np. czarnych pól jest dlatego $c - 1$, że dokładnie raz, przy ujemnym rozszczepieniu połączyliśmy dwa czarne pola wyjściowej szachownicy. Ale na wyjściowej szachownicy żaden obszar nie styka się ze sobą, zatem połączyliśmy dwa różne czarne obszary, tym samym zmniejszając ich liczbę o 1.) Wkład nowej konfiguracji do nawiasu Kauffmana jest więc równy $A^{s-2}(-A^{-2}-A^2)^{c-2}$ i A nie pojawia się w potęgę wyższej niż $s + 2c - 6$. A teraz zobaczymy, co będzie się działo dalej, jeżeli jeszcze jakieś inne skrzyżowania zdecydujemy się rozszczepić ujemnie zamiast dodatnio. Otóż przy każdej takiej zmianie liczba okręgów może wzrosnąć co najwyżej o 1, natomiast suma znaków rozszczepień musi spaść o 2. Nowa konfiguracja nie może więc dostarczyć zmiennej A w potęgę wyższej niż poprzednia. Zatem maksymalny stopień, w którym zmienna A pojawia się w nawiasie Kauffmana naszego diagramu, jest równy $s + 2c - 2$. Analogicznie najniższy stopień jest równy $-s - 2b + 2$ (pochodzi on od ujemnych rozszczepień). Rozpiętość wielomianu jest więc równa $s + 2c - 2 + s - 2b + 2 = 2s + 2(b + c - 2) = 4s$, co właśnie chcieliśmy udowodnić.

Cztery czy dwa?

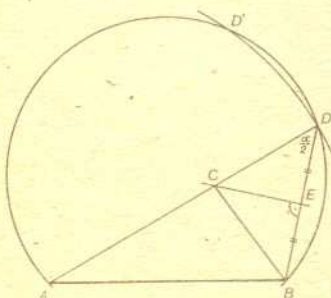
Nietrudno skonstruować trójkąt, jeśli dany jest jego jeden bok AB , suma dwóch pozostałych c oraz kąt między nimi α . Szukany wierzchołek można znaleźć w każdej z dwóch półpłaszczyzn o brzegu AB , dlatego dalej szukać go będziemy tylko w jednej z nich. Rozwiązujemy tak (rys. 1): znajdujemy punkty przecięcia łuku okręgu, z którego odcinek AB widać pod kątem $\alpha/2$, z półokręgiem o środku A i promieniu c . Takie punkty są na ogół dwa — oznaczmy je D i D' . Punkt C , w którym symetralna odcinka BD przecina prostą AD , jest trzecim wierzchołkiem trójkąta. Powtarzając to samo dla punktu D' otrzymujemy drugie rozwiązanie C' . Ale całą konstrukcję można rozpocząć od punktu B zamiast A — są więc cztery rozwiązania...

Z drugiej strony miejscem geometrycznym takich punktów X , że $AX + BX = c$, jest elipsa (interesuje nas tylko jej połowa), a takich punktów Y , że $\sphericalangle AYB = \alpha$, jest łuk okręgu (innego niż poprzednio) o cięciwie AB (rys. 2). Elipsa przecina okrąg w co najwyżej dwóch punktach...

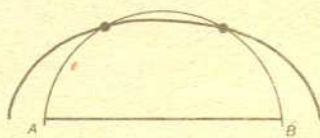
Coś więc się tu nie zgadza, ale co?

Odpowiedź jest prosta. Punkty C_1 i C'_1 skonstruowane dla wierzchołka B pokrywają się z punktem C' i C (mimo że punkty D_1 i D'_1 są różne od D i D') (rys. 3). Okazuje się, że dzięki temu można uprościć konstrukcję z rysunku 1. Punkt C leży na przecięciu odcinków AD i BD'_1 , a punkt C' na przecięciu AD' i BD_1 .

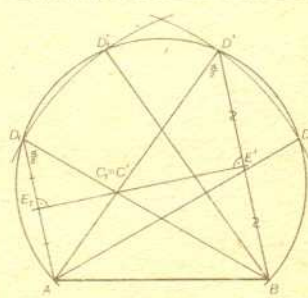
doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3