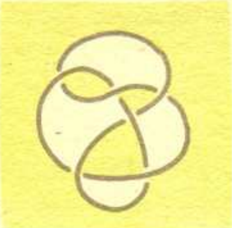
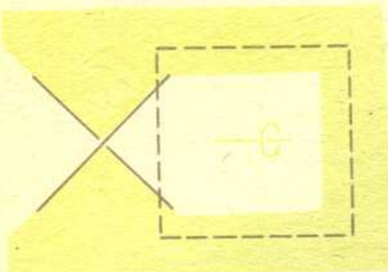


Rys. 6. Kolory zostały rozmieszczone w taki sposób, że każde rozszczepienie dodatnie powoduje połączenie białych obszarów.



Rys. 7. Jeżeli pewien obszar szachownicy styka się ze sobą, to diagram nie jest zredukowany. Możemy obrócić część diagramu zawartą w prostokącie kasując zaznaczone skrzyżowanie.

pokolorujmy obszary, na które nasz diagram dzieli płaszczyznę, w szachownicę, to znaczy, że dwa obszary stykające się wzdłuż linii mają mieć różne kolory, a dwa obszary stykające się narożami mają mieć ten sam kolor. Np. rysunek 6 przedstawia diagram z rysunku 1 pokolorowany w szachownicę. Jeżeli w rozpatrywanym diagramie węzła jest s skrzyżowań, a w naszej szachownicy b pól białych i c pól czarnych, to $s = b+c-2$. Łatwo to udowodnić przez indukcję względem s. Jeżeli $s = 0$, to oczywiście nasz diagram jest po prostu pojedynczym okręgiem i są dwa obszary, jeden czarny, drugi biały. Zatem $b+c-2 = 1+1-2 = 0 = s$. A teraz krok indukcyjny. Weźmy dowolne skrzyżowanie i rozszczepmy je tak, aby uzyskać znowu diagram pewnego węzła (to zawsze jest możliwe; rozszczepiając dowolne skrzyżowanie na dwa możliwe sposoby uzyskujemy raz węzeł, a raz splot o dwóch składowych). Po takim rozszczepieniu liczba skrzyżowań spada o 1, ale także liczba obszarów zmniejsza się o jeden!

Dla diagramów alternujących sytuacja jest pod pewnym względem szczególna: można rozmieścić kolory w szachownicy tak, aby rozszczepienie dodatnie powodowało zawsze połączenie białych obszarów, a rozszczepienie ujemne połączenie czarnych obszarów (wystarczy dobrze zacząć od jednego skrzyżowania, dalej już wyjdzie samo).
Rozszczepmy wszystkie skrzyżowania w sposób dodatni. Otrzymamy jedno pole białe i — w dalszym ciągu — c pól czarnych — po prostu czarne pola nie miały okazji, żeby się łączyć. W uzyskanej konfiguracji jest więc c okręgów, a jej wkład do nawiasu Kauffmana wyjściowego diagramu wynosi $A^s(-A^{-2}-A^2)^{c-1}$. Najwyższą potęgą zmiennej A w tym wyrażeniu jest $s+2c-2$. Pokażemy, że żadna inna końcowa konfiguracja nie może już wnieść zmiennej A w tak wysokiej potędze. Przyjrzyjmy się najpierw konfiguracjom powstałym przez rozszczepienie $s-1$ skrzyżowań w sposób dodatni i jednego w sposób ujemny. Otóż w takiej konfiguracji jest jedno białe pole, ale pól czarnych już tylko $c-1$. (Tutaj korzystamy dwukrotnie z założenia, że diagram jest zredukowany. Np. czarnych pól jest dlatego $c-1$, że dokładnie raz, przy ujemnym rozszczepieniu połączyliśmy dwa czarne pola wyjściowej szachownicy. Ale na wyjściowej szachownicy żaden obszar nie styka się ze sobą, zatem połączyliśmy dwa różne czarne obszary, tym samym zmniejszając ich liczbę o 1.) Wkład nowej konfiguracji do nawiasu Kauffmana jest więc równy $A^{s-2}(-A^{-2}-A^2)^{c-2}$ i A nie pojawia się w potędze wyższej niż $s+2c-6$.
A teraz zobaczmy, co będzie się działo dalej, jeżeli jeszcze jakieś inne skrzyżowania zdecydujemy się rozszczepić ujemnie zamiast dodatnio. Otóż przy każdej takiej zmianie liczba okręgów może wzrosnąć co najwyżej o 1, natomiast suma znaków rozszczepień musi spaść o 2. Nowa konfiguracja nie może więc dostarczyć zmiennej A w potędze wyższej niż poprzednia. Zatem maksymalny stopień, w którym zmienna A pojawia się w nawiasie Kauffmana naszego diagramu, jest równy $s+2c-2$.
Analogicznie najniższy stopień jest równy $-s-2b+2$ (pochodzi on od ujemnych rozszczepień). Rozpiętość wielomianu jest więc równa $s+2c-2+s+2b-2 = 2s+2(b+c-2) = 4s$, co właśnie chcieliśmy udowodnić.

Cztery czy dwa?

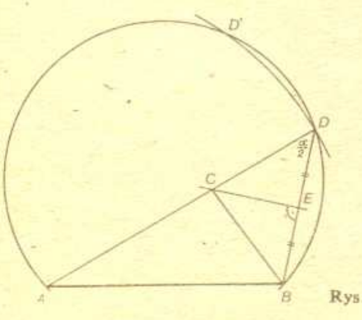
Nietrudno skonstruować trójkąt, jeśli dany jest jego jeden bok AB, suma dwóch pozostałych c oraz kąt między nimi α. Szukany wierzchołek można znaleźć w każdej z dwóch półpłaszczyzn o brzegu AB, dlatego dalej szukać go będziemy tylko w jednej z nich. Rozwiązywać możemy tak (rys. 1): znajdujemy punkty przecięcia łuku okręgu, z którego odcinek AB widać pod kątem $\alpha/2$, z półokręgiem o środku A i promieniu c. Takie punkty są na ogół dwa — oznaczmy je D i D'. Punkt C, w którym symetralna odcinka BD przecina prostą AD, jest trzecim wierzchołkiem trójkąta. Powtarzając to samo dla punktu D' otrzymujemy drugie rozwiązanie C'. Ale całą konstrukcję można rozpocząć od punktu B zamiast A — są więc cztery rozwiązania...

Z drugiej strony miejscem geometrycznym takich punktów X, że $AX+BX = c$, jest elipsa (interesuje nas tylko jej połowa), a takich punktów Y, że $\sphericalangle AYB = \alpha$, jest łuk okręgu (innego niż poprzednio) o cięciwie AB (rys. 2). Elipsa przecina okrąg w co najwyżej dwóch punktach...

Coś więc się tu nie zgadza, ale co?

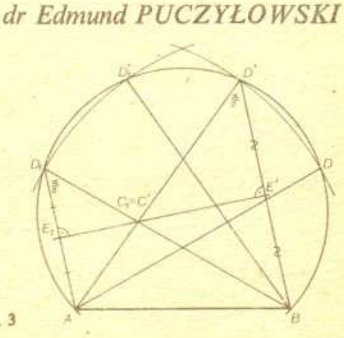
Odpowiedź jest prosta. Punkty C_1 i C_1' skonstruowane dla wierzchołka B pokrywają się z punktem C' i C (mimo że punkty D_1 i D_1' są różne od D i D') (rys. 3). Okazuje się, że dzięki temu można uprościć konstrukcję z rysunku 1. Punkt C leży na przecięciu odcinków AD i BD_1', a punkt C' na przecięciu AD' i BD_1.

doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Rys. 1

Rys. 2



Rys. 3