Nierówności cykliczne

Mgr Jarosław GÓRNICKI

Cykliczność to zjawisko, które w matematyce jest znane. Mamy cykliczne: grupy, permutacje, no i nierówności. Na te ostatnie chcemy zwrócić uwagę Czytelników.

Oto najprostszy przykład. Jeżeli różne od zera liczby rzeczywiste x_1, x_2 są tego samego znaku, to

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\geqslant 2. \tag{1}$$

Wynika to z rachunku

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{1}{x_1x_2}(x_1-x_2)^2+2\geqslant 2.$$

Naturalne uogólnienie nierówności (1) jest następujące.

Twierdzenie 1. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną ($n\geqslant 2$). Wtedy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\frac{x_3}{x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geqslant n. \tag{2}$$

Dowód. Skorzystamy z zasady indukcji matematycznej. Dla $n=2$ nierówność jest prawdziwa. Załóżmy, że dla pewnego n zachodzi wzór (2). Wykażemy, że wtedy prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_{n+1}}{x_1}\geqslant n+1.$$

Niech $x_1=\min(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, czyli $x_2\geqslant x_1, \ldots, x_{n+1}\geqslant x_1$.
Mamy więc

$$(x_2-x_1)(x_{n+1}-x_1)=x_2x_{n+1}-x_2x_1-x_1x_{n+1}+x_1^2\geqslant 0,$$

czyli

$$x_2x_{n+1}-x_1x_{n+1}+x_1^2\geqslant x_2x_1.$$

Dzieląc obustronnie ostatnią nierówność przez x_2x_1 otrzymujemy

$$\frac{x_{n+1}}{x_1}-\frac{x_{n+1}}{x_2}+\frac{x_1}{x_2}\geqslant 1,$$

skąd

$$\frac{x_1}{x_2}+\left(\frac{x_2}{x_3}+\ldots+\frac{x_n}{x_{n+1}}+\frac{x_{n+1}}{x_2}\right)-\frac{x_{n+1}}{x_2}+\frac{x_{n+1}}{x_1}\geqslant n+1.$$

Gdy $x_k=\min(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})$, gdzie $k\in[2, n+1]\cap\mathrm{N}$, to przenumerowujemy ciąg (x_i) cyklicznie, tzn. $y_1=x_k, y_2=x_{k+1}, y_{n-k+2}=x_{n+1}, y_{n-k+3}=x_1, \ldots, y_{n+1}=x_{k-1}$, a następnie korzystamy z części już udowodnionej. Zatem na podstawie twierdzenia o indukcji matematycznej wzór (2) jest prawdziwy dla liczb naturalnych $n\geqslant 2$.

Można podać prostszy dowód twierdzenia 1, gdy znamy nierówność Cauchy'ego: dla nieujemnych liczb rzeczywistych $y_1, y_2, \ldots, y_n$,

$$\frac{1}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n)\geqslant(y_1\cdot y_2\cdot\ldots\cdot y_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Przyjmując $y_i=\frac{x_i}{x_{i+1}}$ dla $i=1, 2, \ldots, n-1$ oraz $y_n=\frac{x_n}{x_1}$, otrzymujemy

$$\frac{1}{n}\left(\frac{x_1}{x_2}+\ldots+\frac{x_n}{x_1}\right)\geqslant$$

$$\geqslant\left(\frac{x_1}{x_2}\cdot\frac{x_2}{x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{x_{n-1}}{x_n}\cdot\frac{x_n}{x_1}\right)^{\frac{1}{n}}=1.$$

W 1903 roku A. M. Nesbitt podał następującą nierówność dla liczb rzeczywistych (Problem 15114, *Educ. Times* (2) 3 (1903), 37—38):
jeżeli $x_1, x_2, x_3>0$, to

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2}. \tag{3}$$

Jej dowód możemy przeprowadzić korzystając z nierówności (1).

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_1+x_3}+\frac{x_3}{x_1+x_2}=\frac{1}{2}\left[\frac{(x_1+x_2)+(x_1+x_3)}{x_2+x_3}-1+\frac{(x_2+x_1)+(x_2+x_3)}{x_1+x_3}-\right.$$

$$\left.-1+\frac{(x_3+x_1)+(x_3+x_2)}{x_1+x_2}-1\right]=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x_1+x_2}{x_2+x_3}+\frac{x_3+x_2}{x_1+x_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{x_1+x_3}{x_2+x_3}+\frac{x_2+x_3}{x_1+x_3}\right)+\left(\frac{x_2+x_1}{x_1+x_3}+\frac{x_3+x_1}{x_1+x_2}\right)-3\right]\geqslant\frac{1}{2}(2+2+2-3)=\frac{3}{2}.$$

Równość w (3) zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1=x_2=x_3$.

Rozwiązanie zadania M 486. Jedno. W tym celu wystarczy wykazać, że zapis dziesiętny liczby 9^{999} nie kończy się na 99. Gdyby $9^{999}\equiv 99 \pmod{100}$, to $9^{998}\equiv 11 \pmod{100}$, czyli $(9^{499})^2\equiv 11 \pmod{100}$. Jednak kongruencja $x^2\equiv 11 \pmod{100}$ nie ma rozwiązań: jeśli $x=10k\pm 1$, to $x^2=100k^2\pm 20k+1$, skąd wniosek, że cyfra dziesiątek jest parzysta.

Rozwiązanie zadania M 485. Niech X_m oznacz różnicę między liczbą kul w pudełkach I i II po m losowaniach ($X_0=n$). Jeśli $X_m=k$, to w pudełku I jest $\frac{n+k}{2}$ kul (dlaczego jest to liczba całkowita?). Ponadto

$$X_{m+1}-X_m=$$

$$=\begin{cases}-2 \text{ z prawdopodobieństwem } \dfrac{n+k}{2n},\\ 2 \text{ z prawdopodobieństwem } \dfrac{n-k}{2n};\end{cases}$$

czyli $P(X_{m+1}-X_m=-2|X_m=k)=\frac{n+k}{2n}$,

$P(X_{m+1}-X_m=2|X_m=k)=\frac{n-k}{2n}$.

Dla wygody wprowadzimy nowe oznaczenie: jeśli X jest zmienną losową, A — zdarzeniem, to $\mathrm{E}(X; A)=\mathrm{E}X\cdot I_A$, gdzie I_A jest zmienną losową przyjmującą wartość 1, gdy A zaszło i 0 w przeciwnym razie. Mamy więc

$$\mathrm{E}(X_{m+1}-X_m; X_m=k)=-2\cdot\frac{k}{n}\cdot P(X_m=k).$$

Sumując po k otrzymujemy

$$\mathrm{E}(X_{m+1}-X_m)=-\frac{2}{n}\cdot\mathrm{E}X_m,$$

stąd $$\mathrm{E}X_{m+1}=\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\mathrm{E}X_m,$$

zatem $$\mathrm{E}X_m=\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\cdot\mathrm{E}X_0=\left(1-\frac{2}{n}\right)^m\cdot n.$$

Jak widać, średnia różnica dość szybko zmierza do zera.

Nierówność (3) może mieć różne uogólnienia w postaci nierówności cyklicznych. Pierwszym z nich jest

Twierdzenie 2. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną ($n \geqslant 2$). Wtedy dla dowolnych dodatnich liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

Dowód. Zastosujemy to samo przekształcenie co w dowodzie nierówności (3). W celu uproszczenia zapisów wprowadźmy oznaczenia:

$$u_i = x_1+x_2+\ldots+x_n-x_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Otrzymujemy wtedy

$$x_i = \frac{u_1+u_2+\ldots+u_n}{n-1}-u_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

a zatem

$$\frac{x_1}{x_2+x_3+\ldots+x_n}+\frac{x_2}{x_1+x_3+\ldots+x_n}+\ldots+\frac{x_n}{x_1+x_2+\ldots+x_{n-1}} =$$

$$= \frac{1}{n-1}\left[\left(\frac{u_1}{u_2}+\frac{u_2}{u_1}\right)+\ldots+\left(\frac{u_{n-1}}{u_n}+\frac{u_n}{u_{n-1}}\right)-n(n-2)\right] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{n-1}(\underbrace{2+2+\ldots+2}_{\frac{n(n-1)}{2}\text{ razy}}-n(n-2)) = \frac{1}{n-1}(n^2-n-n^2+2n) = \frac{n}{n-1}.$$

Inne uogólnienie nierówności (3) zaproponował w 1954 roku, na łamach *The American Mathematical Monthly* (Problem 4603, str. 571), H. S. Shapiro,

Problem Shapiro. Niech $0 \leqslant x_i \in \mathbf{R}, x_i+x_{i+1} > 0$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$, $(x_{n+1} = x_1)$. Czy dla wszystkich naturalnych $n \geqslant 3$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_4}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2} \geqslant \frac{n}{2}? \tag{4}$$

Negatywną odpowiedź dał w 1956 roku M. J. Lighthill wykazując, że dla $n = 20$ nierówność (4) nie zachodzi. W tym samym roku H. S. Shapiro podał dowód nierówności (4) dla $n = 4$, C. R. Phelps zaś — dowód dla $n = 5$. Powstało wtedy pytanie: dla jakich $n \geqslant 3$ nierówność (4) jest prawdziwa? W latach następnych pojawiło się kilkadziesiąt prac, m.in. A. Zulaufa i P. H. Dianandy, którzy podjęli to zagadnienie. W wyniku dotychczasowej działalności udowodniono, że

1° dla $n \leqslant 13$ nierówność (4) jest prawdziwa,

2° dla $n = 14, 16, 18, 20, 22$ i dla dowolnego $n \geqslant 24$ nierówność (4) jest fałszywa.

Przypadki $n = 15, 17, 19, 21$ 23, nie zostały dotychczas rozstrzygnięte!

W 1958 roku A. Zulauf podał kontrprzykład dla $n = 14$. Nie będziemy tu omawiać metody, która pozwala podać wiele takich przykładów, a wskażemy jeden układ liczb rzeczywistych, dla których nierówność (4) nie jest spełniona. Oto te liczby:

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{14}) = \left(\frac{17}{10}, \frac{7}{10}, \frac{7}{5}, \frac{3}{5}, \frac{11}{10}, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{5}, \frac{11}{10}, 0, \frac{7}{5}, \frac{1}{10}, \frac{8}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

Wprowadźmy oznaczenie

$$f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_1}+\frac{x_n}{x_1+x_2}.$$

Wówczas elementarne rachunki pokazują, że

$$f_{14}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_{14}) = 2+\frac{9965667}{2042040} \approx 6{,}88 < \frac{14}{2}.$$

A. Zulauf podał również kilka ciekawych obserwacji.

I. Jeżeli w problemie Shapiro istnieje kontrprzykład dla n, to istnieje kontrprzykład dla $n+2$.

Dowód. Niech liczby $x_1, x_2, \ldots, x_n$ spełniają wszystkie założenia problemu Shapiro oraz $f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \frac{n}{2}$. Na podstawie łatwej do sprawdzenia równości

$$f_{n+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n-1}, x_n) = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)+1$$

widać, że istnieją liczby $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, y_{n+2}$, dla których

Rozwiązanie zadania F 231. Tryt różni się od wodoru jedynie istnieniem dwóch dodatkowych neutronów w jądrze, a więc jego własności chemiczne, określone przez elektrony, będą takie same jak „zwykłego" wodoru. A więc w temperaturze pokojowej będzie to gaz o wzorze $^3H_2$ i masie molowej $\mu = 6$ g/mol. Na początku podanego okresu w pojemniku znajdowała się $v_W = 1/6$ mola wodoru. W ciągu 12 lat połowa jego przekształca się w jednoatomowy hel, a więc zostało $v = 1/4$ mola. Ciśnienie znajdziemy z równania stanu gazu doskonałego:

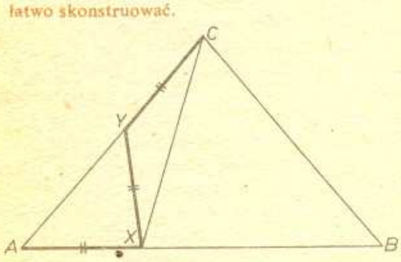
$$p = v\mathrm{R}T/V = 6{,}2\cdot 10^5 \text{ Pa}.$$

Rozwiązanie zadania M 484. Jeżeli punkty X i Y stanowią rozwiązanie zadania, to

1° $\sphericalangle CAB = \sphericalangle YAX = \sphericalangle AYX$ — wynika stąd, że rozwiązanie istnieje tylko dla takich A, B, C, dla których $\sphericalangle CAB < 90°$;

2° $\sphericalangle ACX = \sphericalangle YCX = \sphericalangle YXC = = \frac{1}{2}(180° - \sphericalangle CYX) = \frac{1}{2}\sphericalangle AYX = \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$ — wynika stąd, że rozwiązanie istnieje tylko dla takich A, B, C, dla których $\sphericalangle ACB > \frac{1}{2}\sphericalangle CAB$.

Warunki te wystarczają również do przeprowadzenia konstrukcji, bowiem z 2° wynika, że X leży na półprostej tworzącej z CA kąt $\frac{1}{2}\alpha$, gdzie $\alpha = \sphericalangle CAB$, a taką półprostą łatwo skonstruować.



Wynik dla $n = 13$ został uzyskany w 1985 roku (B. A. Troesch w *Math. Computation* 45 (1985), 199—207).

Rozwiązanie zadania F 230. Po wybuchu liczba cząstek radioaktywnych pochodzących z wybuchu $M = 1$ kg plutonu ($A = 242$) w całej atmosferze wynosi $N = MN_A/A = = 2{,}5\cdot 10^{24}$. Masa powietrza w atmosferze jest równa $M_0 = P_0 4\pi R^2/g = 4{,}6\cdot 10^{18}$ kg, a liczba molekuł powietrza w całej atmosferze $N_0 = M_0 N_A/\mu = 9{,}6\cdot 10^{43}$ (μ — masa molowa, P_0 ciśnienie normalne). Liczbę molekuł w objętości 1 dm^3 można w warunkach normalnych znaleźć z warunku, że 1 mol ($6{,}02\cdot 10^{23}$) powietrza zajmuje objętość $V_0 = 22{,}4$ dm^3. Znając całą liczbę molekuł powietrza i cząsteczek radioaktywnych możemy znaleźć liczbę cząstek w objętości $V = 1$ dm^3: $n = n_0 N/N_0 = = 700$ dm^{-3}.

A więc każda próba atomowa w atmosferze powoduje, iż za każdym kolejnym wdechem wchłaniamy do organizmu około 700 długożyciowych radioaktywnych produktów rozpadów zachodzących w trakcie wybuchu.

$$f_{n+2}(y_1, y_2, \dots, y_{n+2}) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)+1 < \frac{n+2}{2}.$$

Ponieważ wskazaliśmy kontrprzykład dla $n = 14$, więc na podstawie powyższej uwagi, dla dowolnego parzystego $n > 14$ nierówność (4) jest fałszywa.

II. Dla losowo wybranych n dodatnich liczb rzeczywistych prawdopodobieństwo tego, że nierówność (4) jest prawdziwa, wynosi co najmniej $\frac{1}{2}$.

Jest to konsekwencja następującej nierówności

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)+f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) \geqslant n.$$

Oto jej dowód. Jeżeli $A_k = x_k+x_{k+1}$, $(x_{k+n} = x_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$, to wtedy

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n)+f_n(x_n, x_{n-1}, \dots, x_1) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k+x_{k+3}}{A_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k-A_{k+1}+A_{k+2}}{A_{k+1}} =$$

$$= -n+\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{A_{k+1}}+\sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} \geqslant n,$$

ponieważ

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{A_{k+1}} \geqslant n, \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{A_{k+2}}{A_{k+1}} \geqslant n$$

na podstawie twierdzenia 1.

III. Dla nieujemnych liczb rzeczywistych $x_1, x_2, \dots, x_n$ $(n \geqslant 3)$, takich, że $x_i+x_{i+1} > 0$, $(x_{n+1} = x_1, i = 1, 2, \dots, n)$ prawdziwa jest nierówność

$$1 < \frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\dots+\frac{x_{n-1}}{x_{n-1}+x_n}+\frac{x_n}{x_n+x_1} < n-1.$$

Czytelnika zainteresowanego tą problematyką odsyłamy do prac oryginalnych, których bibliografię można znaleźć w monografii Dragoslava S. Mitrinovicia *Analytic Inequalities*.

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 484. Dany jest trójkąt ABC. Znaleźć taki punkt X na boku AB i taki punkt Y na boku AC, żeby $AX = XY = YC$.
Rozwiązanie na str. 11

M 485. W pudełku I znajduje się n ponumerowanych kul. Pudełko II jest puste. Postępujemy w następujący sposób: losujemy numer kuli i kulę o tym numerze przekładamy z pudełka do pudełka. Znaleźć średnią różnicę liczby kul w pudełku I i II po m przełożeniach.
Rozwiązanie na str. 10

M 486. Ile zer ma na końcu liczba $9^{999}+1$ w zapisie dziesiętnym?
Rozwiązanie na str. 10

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 230. Zakładając, że podczas wybuchu bomby atomowej wykonanej z $M = 1$ kg plutonu ^{242}Pu z każdego atomu plutonu powstaje jedna długożyciowa cząstka radioaktywna, ocenić liczbę takich cząstek w objętości $V = 1\ dm^3$ powietrza przy powierzchni Ziemi. Przyjąć, że wiatr powoduje równomierne rozprzestrzenienie w całej atmosferze Ziemi radioaktywnych produktów wybuchu. Promień Ziemi jest równy $R = 6 \cdot 10^6$ m.
Rozwiązanie na str. 11

F 231. W pojemniku o objętości 1 l znajduje się 1 g trytu (izotop wodoru o masie atomowej 3) o temperaturze 27°C. W ciągu 12 lat połowa jąder trytu przejdzie w jądra helu. Jakie ciśnienie będzie panowało w zbiorniku po upływie tego czasu?
Rozwiązanie na str. 11