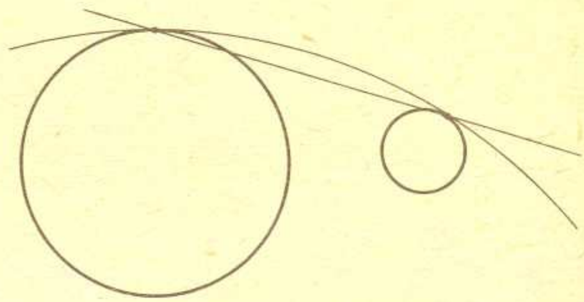
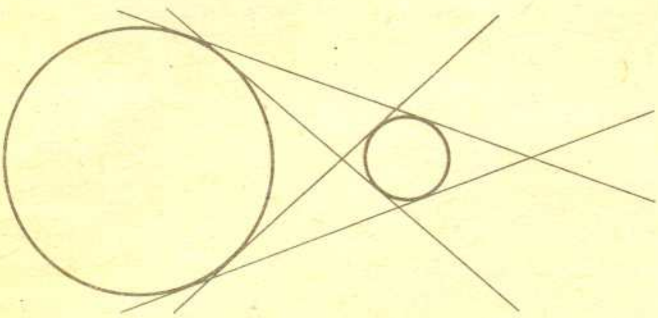
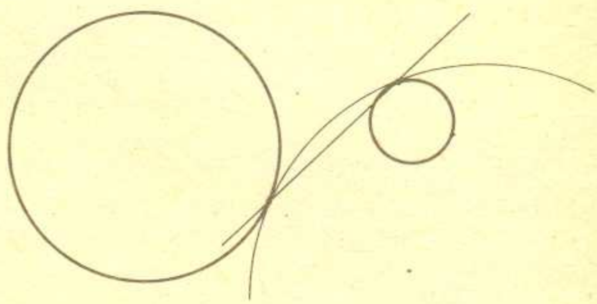
mała delta

Cztery styczne do dwóch okręgów

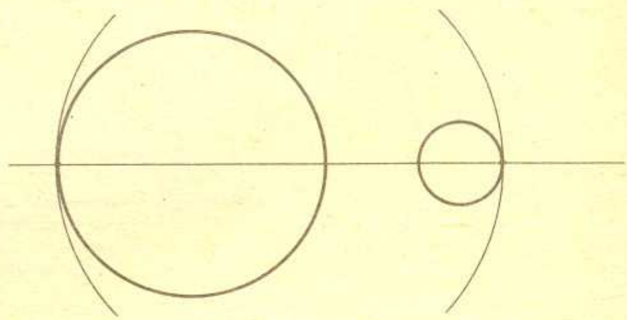


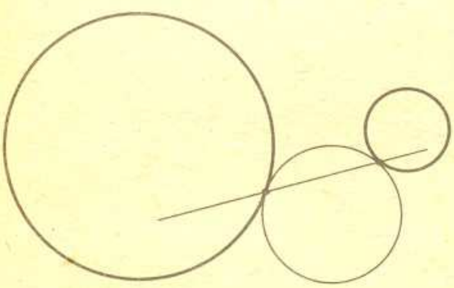
Dwa różnej wielkości okręgi, leżące jeden na zewnątrz drugiego, mają cztery wspólne styczne. To wie każdy. Nie każdy natomiast wie, że te styczne mają dużo ciekawych własności.

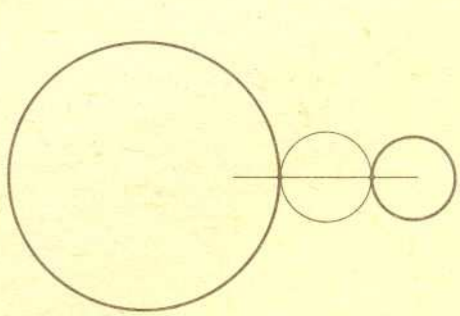




Narysujmy trzeci okrąg, styczny do pierwszych dwóch. Punkty styczności leżą na prostej przechodzącej albo przez punkt przecięcia zewnętrznych stycznych, albo przez punkt przecięcia wewnętrznych stycznych.



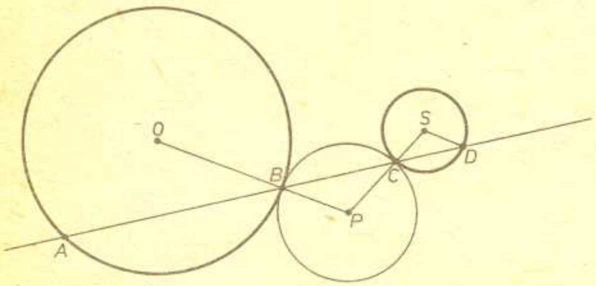




To „albo" bierze się stąd, że trzeci okrąg może być do każdego z pierwszych styczny albo zewnętrznie, albo wewnętrznie. Może się też zdarzyć, że na prostej przechodzącej przez punkty styczności leżeć będą oba punkty przecięcia stycznych.

Dowiedziemy, że w przypadku, gdy trzeci okrąg jest oba razy styczny zewnętrznie, punkty styczności leżą na prostej przechodzącej przez punkt przecięcia zewnętrznych stycznych. Nie będziemy rysowali zresztą tych stycznych. Spójrzmy na rysunek.

$$\sphericalangle OBA = \sphericalangle PBC = \sphericalangle PCB = \sphericalangle SCD = \sphericalangle SDC$$

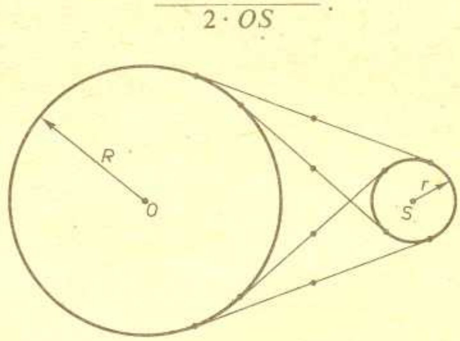


Pierwsza i trzecia równość wynika stąd, że kąty są wierzchołkowe, a druga i czwarta z tego, że trójkąty są równoramienne. Z równości pierwszego i piątego kąta wynika, że promienie OB i SD są równoległe. Można więc przekształcić jednokładnie jeden okrąg na drugi tak, by te promienie nałożyły się. Wówczas zarówno prosta OS, jak prosta BD będą przechodziły przez środek jednokładności. A przecież środkiem tym jest punkt przecięcia stycznych.

Czytelnicy zechcą przeprowadzić dowód w pozostałych przypadkach — okaże się on bardzo podobny. I okaże się też, że jeśli obie styczności są takie same (zewnętrzne lub wewnętrzne), to prosta przechodząca przez punkty styczności przechodzi przez punkt przecięcia stycznych zewnętrznych, a gdy styczności są różne — wewnętrznych.

A oto jeszcze jedna własność czterech stycznych do dwóch okręgów. Środki odcinków każdej z nich — od punktu styczności do punktu styczności — leżą na jednej prostej. Aby sprawdzić to, można np. stwierdzić, że rzut prostokątny każdego z nich jest tym samym punktem odcinka OS — mianowicie punktem odległym od O o

$$\frac{OS^2 + R^2 - r^2}{2 \cdot OS}.$$



Jestem pewny, że Czytelnicy potrafią znaleźć bardziej elegancki dowód tego twierdzenia.

Małą Deltę przygotował Marek KORDOS