

Komputer szuka jedności

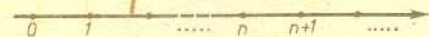
Trudno się spodziewać, aby komputer mógł „sam” udowodnić twierdzenie dotyczące zbiorów nieskończonych, może on jednak pomóc matematykowi w formułowaniu hipotez, których potem dowodzi się „ręcznie”. Właśnie za jego pomocą opisałem grupę elementów odwracalnych pewnego pierścienia — okazało się, że badana nieskończona grupa nie jest nawet skończenie generowana. Potrzebne jest jednak pewne wprowadzenie.

Rozważmy zbiór wszystkich izometrii prostej rzeczywistej przekształcających zbiór liczb całkowitych \mathbf{Z} na siebie. Izometrie te ze składaniem jako działaniem tworzą grupę, tzw. grupę dihedralną nieskończoną, którą będziemy oznaczać symbolem D . Zaczniemy od opisanja jej. Izometria prostej jest wyznaczona przez swoje wartości na dwóch różnych punktach, np. 0 i 1. Weźmy dowolne $f \in D$ — niech $f(0) = n \in \mathbf{Z}$. Zachodzi jedna z dwóch możliwości.

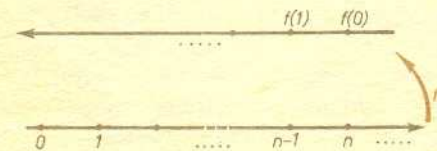
Albo $f(1) = 1 + n$, co daje $f(r) = r + n$ dla każdego $r \in \mathbf{R}$,

Zbiór G wraz z dwuargumentowym, łącznym działaniem „ \cdot ”, oraz wyróżnionym elementem e nazywamy grupą, jeśli dla każdego g :

- $e \cdot g = g = g \cdot e$.
- istnieje $h \in G$ spełniająca $g \cdot h = h \cdot g = e$.



albo $f(1) = -1 + n$ i wtedy $f(r) = -r + n$.



Używając dwóch szczególnych izometrii: przesunięcia o 1 ($f(r) = r + 1$) oraz symetrii względem punktu 0 ($x(r) = -r$), w pierwszym przypadku zapisujemy f jako $f = t^n$, w drugim $f = t^{-n}x$. Oznacza to, że x, t generują grupę D . Zauważmy, że $x^2(r) = r = id(r)$, $xt(r) = -r - 1 = t^{-1}x(r)$, zatem w D zachodzą równości: $x^2 = e$, $xt = t^{-1}x$ — tę ostatnią łatwo jest indukcyjnie uogólnić na $xt^i = t^{-i}x$ dla $i \in \mathbf{Z}$. Tym sposobem uzyskaliśmy pełny opis grupy D — dowolne jej elementy umiemy przedstawiać w postaci t^n lub $t^n x$, a ich iloczyn sprowadzić do takiej postaci za pomocą równości $x^2 = e$, $xt^i = t^{-i}x$, np. $t^n x t^m = t^n t^{-m} x = t^{n-m} x$, $t^n x t^m x = t^n t^{-m} x^2 = t^{n-m}$.

Mówimy, że podzbiór $X \subseteq G$ generuje grupę G , jeśli każdy element $g \in G$ daje się zapisać w postaci iloczynu $g = x_1 \cdot \dots \cdot x_n$, gdzie $x_i \in X$.

Oznaczmy przez $Z_2 D$ rodzinę wszystkich skończonych podzbiorów D , określimy na niej dwa działania. Dla $A, B \in Z_2 D$ określimy sumę $A + B$ jako zbiór składający się z tych elementów D , które należą do dokładnie jednego ze zbiorów A, B , czyli jako różnicę symetryczną $A \dot{-} B$. W szczególności jeśli $A = \{g_1, \dots, g_n\}$, to $A = \{g_1\} + \dots + \{g_n\}$ — będziemy stosować skrócony zapis $A = g_1 + \dots + g_n$. Mnożenie zadajemy najpierw na zbiorach jednoelementowych przez $\{g\} \cdot \{h\} = \{g \circ h\} \subseteq D$, a dowolne

$A, B \in Z_2 D$ mnożymy korzystając z rozdzielności mnożenia względem dodawania, przedstawiając je w postaci $A = g_1 + \dots + g_n$, $B = h_1 + \dots + h_l$. Tak określone działania mają podobne własności do dodawania i mnożenia liczb całkowitych — rolę jedynki przejmuje $\{id\} \in Z_2 D$, rolę zera zbiór pusty. Mówimy, że $Z_2 D$ jest pierścieniem. Mnożenie w $Z_2 D$ nie jest przemienne, np. $\{x\} \cdot \{t\} \neq \{t\} \cdot \{x\}$, bo $t \circ x \neq x \circ t$, ciekawym zjawiskiem jest występowanie dzielników zera, tzn. niezerowych elementów, których iloczyn jest zerem, np. $\{id, x\} \neq \emptyset$, ale $\{id, x\} \cdot \{id, x\} = (id + x) \cdot (id + x) = id \circ id + id \circ x + x \circ id + x \circ x = (id + x) + (x + id) = \{id, x\} + \{id, x\} = \emptyset$. Nas szczególnie interesować będą elementy odwracalne (czasami nazywane jednościami), czyli takie $u \in Z_2 D$, dla których istnieje $v \in Z_2 D$ spełniające $u \cdot v = v \cdot u = \{id\}$. Łatwo jest sprawdzić, że jedności tworzą grupę ze względu na mnożenie w $Z_2 D$; oznaczmy ją przez U . Moim zadaniem było opisanie tej grupy, a w jego realizacji szczególnie pomocny okazał się komputer IBM PC.

Zbiór P z dwoma dwuargumentowymi działaniami „ $+$ ” i „ \cdot ” nazywamy pierścieniem, jeśli

- P z działaniem „ $+$ ” jest grupą,
- „ $+$ ” jest przemienne,
- „ \cdot ” jest łączne,
- „ \cdot ” jest rozdzielne względem „ $+$ ”, tj. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

Najprostszymi elementami odwracalnymi w $Z_2 D$ są jednoelementowe podzbiory D (dla $u = \{g\}$ wystarczy przyjąć $v = \{g^{-1}\}$); tworzą one grupę tzw. trywialnych jedności, którą zapominając o nawiasach $\{ \}$ można utożsamić z D . Opisane w ten sposób trywialne jedności nie wyczerpują jednak całego U , bo np. $u = t^{-1} + id + t + t^{-1}x + tx$ spełnia $u \cdot u = \{id\}$, zatem $u \in U$. Wiedziałem, że mogę się ograniczyć do badania elementów odwracalnych szczególnej postaci $u = id + t^{i_1} + \dots + t^{i_n} + t^{j_1}x + \dots + t^{j_l}x + t^d x$, gdzie $0 < i_1 < \dots < i_n < d$, $0 < j_1 < \dots < j_l < d$ — liczbę d będę dalej nazywał stopniem u . Pierwszym zadaniem napisanego w Turbo-Pascalu programu było znalezienie wszystkich jedności powyższej postaci i stopnia nie większego od 12. Po około 40 minutach obliczeń, w czasie których sprawdzonych zostało 8 384 513 kandydatów, komputer wypisał 683 elementy odwracalne. Następnym etapem było znalezienie możliwie najmniejszej liczby generatorów (opisując D widzieliśmy, jak przydatna jest ich znajomość) i rozpisanie znalezionych 683 jedności w postaci ich iloczynów. Tym razem obliczenia trwały około 3 minut i wybranych zostało 12 generatorów $u_i = id + t^i + t^{2i} + x + t^{2i}x$, $w_i = id + t^i + t^{2i} + tx + t^{2i+1}x$ dla $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, do których należało jeszcze dodać generatory grupy trywialnych jedności, czyli $\{t\}$ i $\{x\}$. Przytaczam tu początek wypisanej przez komputer listy:

jedność	rozkład
1. $u_1 = id + t + t^2 + x + t^2x$	generator
2. $u_2 = id + t^2 + t^4 + x + t^4x$	generator
3. $a_1 = id + t + t^2 + t^3 + t^4 + x + tx + t^3x + t^4x$	$a_1 = \{t\} \cdot u_1 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_3$
4. $a_2 = id + t + t^2 + t^4 + t^5 + x + t^2x + t^3x + t^5x$	$a_2 = \{t\} \cdot w_1 \cdot \{t^{-1}\} \cdot u_1$
5. $a_3 = id + t + t^3 + t^4 + t^5 + x + t^2x + t^3x + t^5x$	$a_3 = \{t\} \cdot w_1 \cdot u_1$
6. $u_3 = id + t^3 + t^6 + x + t^6x$	generator
7. $a_4 = id + t + t^3 + t^5 + t^6 + x + tx + t^5x + t^6x$	$a_4 = u_3 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_3$
8. $a_5 = id + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + t^6 + x + tx + t^2x + t^4x + t^5x + t^6x$	$a_5 = u_3 \cdot \{t^{-2}\} \cdot u_3 \cdot \{t^{-1}\} \cdot u_1$

Wyniki sugerowały, że prawdziwe może być twierdzenie: jedności $u_i, w_i, \{t\}, \{x\}$ dla $i > 0$ generują grupę U , przy czym do otrzymania jedności stopnia d wystarczają te u_i, w_i , dla których $2i \leq d$.

Tak konkretnie sformułowaną hipotezę udało mi się udowodnić.

Korzystając z tego samego materiału doświadczalnego zaproponowałem i dowiodłem jeszcze jedno twierdzenie: u_k nie daje się zapisać w postaci iloczynu $\{t\}, \{x\}$ i tych u_i, w_i , dla których $i < k$.

Dwa powyższe twierdzenia pokazują, że żadna skończona liczba jedności nie generuje całego U . Jeśli bowiem $v_1, \dots, v_n \in U$, to

wyberzmy k większe od maksymalnego ze stopni v_i . Na mocy pierwszego twierdzenia każdy iloczyn $v_{i_1} \cdot \dots \cdot v_{i_m}$ daje się też zapisać jako iloczyn $\{t\}, \{x\}$ i tych u_j, w_j , że $2j < k$. Ale na mocy drugiego twierdzenia u_k nie daje się przedstawić w postaci takiego iloczynu, zatem v_1, \dots, v_n nie mogą generować całego U .

Znajomość generatorów grupy elementów odwracalnych pierścienia Z_2D pozwoliła mi ostatecznie na całkowite jej opisanie. Wynik końcowy podaję dla koneserów.

$$U \simeq \left(\bigoplus_{i \in Z} * \oplus_{j \in Z} Z_2 \right) \rtimes D$$



Patrz w niebo

Przez cały 1987 rok Jowisz porusza się w obszarze gwiazdozbiorów zodiakalnych Wodnika i Ryb. 27 marca był w złączeniu ze Słońcem, a więc wczesną wiosną pozostawał niewidoczny dla ziemskiego obserwatora. Później, wskutek tego, że ruch jego jest wolniejszy od ruchu Słońca, stopniowo oddalał się od naszej gwiazdy dziennej w kierunku zachodnim, wschodził tuż przed świtem tak, że do maja pozostawał jeszcze niewidoczny. Od połowy maja wschodzi już na tyle wcześniej, że można obserwować go na ciemnym tle nieba. Każdej nocy moment jego wschodu jest coraz wcześniejszy, aż do czasu, gdy znajdzie się w opozycji ze Słońcem. Wtedy, jak każda planeta górna, będzie świecił, dla ziemskiego obserwatora, po przeciwnej stronie nieba niż Słońce. W dniu opozycji wędzie dokładnie o zachodzie Słońca, będzie górował o północy i pozostanie nad horyzontem przez całą noc.

Przypadająca w tym roku 17 października opozycja jest dość korzystna. Średnica kątowa planety, podczas jej największego zbliżenia do Ziemi, osiągnie $49''7$. Maksymalnie, podczas opozycji, tarcza Jowisza może osiągać $52''$ i zdarza się to co 83 lata. Najbliższą wielką opozycję będziemy mogli zaobserwować dopiero w 2034 roku, a obecna jest największa od 1975 roku. Do momentu, gdy w listopadzie na niebie wieczornym pojawi się Wenus, Jowisz (przy jasności około $-2,9$ mag) będzie najjaśniejszą „gwiazdą”. Następnie aż do maja przyszłego roku Wenus pozostanie najjaśniejszą „gwiazdą wieczorną”.

Jesienią Merkury znajdzie się dwukrotnie w największej elongacji, tj. najdogodniejszym położeniu dla ziemskiego obserwatora. Najpierw — 3 października — oddali się o 26° na wschód od Słońca. W tym czasie jednak ekliptyka tworzy mały kąt z horyzontem (patrz *Delta* 1/1986), a więc Merkury będzie słabo widoczny i zajdzie jeszcze o zmierzchu. Później, w okolicach 13 listopada, będzie można dostrzec Merkurego na niebie porannym, w maksymalnej odległości (19°) na zachód od Słońca. Tym razem, choć maksymalna odległość kątowa będzie mniejsza niż w październiku, warunki obserwacji będą znacznie lepsze, ponieważ o tej porze roku ekliptyka tworzy o świcie duży kąt z horyzontem.

Ci, którzy lubią wstawać, mają szansę zaobserwować jesienią również Marsa. Od 23 sierpnia, gdy przeszedł złączenie ze Słońcem, warunki jego widzialności stopniowo polepszają się. 10 listopada warto zwrócić uwagę na stosunkowo bliskie (w odległości 3°) przejście Marsa na północ od Spiki — najjaśniejszej gwiazdy konstelacji Panny. Do września przyszłego roku Mars będzie wschodził coraz wcześniej, aż do momentu osiągnięcia opozycji. Tym razem będzie to Wielka Opozycja Marsa! (O opozycjach Marsa pisaliśmy w *Delcie* 7/1986.)

Miłośnikom nieba, dysponującym przyrządami astronomicznymi, polecamy dokonanie obserwacji Jowisza podczas zbliżającej się opozycji. Wielka planeta jest szczególnie efektywna — przy trzydziestokrotnym powiększeniu wygląda jak Księżyc obserwowany gołym okiem. Kilkunastocentymetrowy instrument pozwala dostrzec kilka charakterystycznych pasów równoległych do równika planety. Pasy te utworzone są z chmur istniejących w rozległej atmosferze Jowisza. O istnieniu atmosfery świadczy również fakt, że tarcza planety jest jaśniejsza w środku niż przy brzegu.

Dla skromnych na ogół środków optycznych miłośnika astronomii dostępne są tylko cztery najjaśniejsze (odkryte przez Galileusza) satelity Jowisza. Widąc je w postaci świecących punktów, zmieniających szybko swe położenie względem planety. Ich ruch odbywa się niemal dokładnie w płaszczyźnie równika Jowisza, toteż cały czas układają się prawie wzdłuż prostej. W ciągu kilku godzin obserwacji można zauważyć zakrycia satelitów Jowisza przez jego tarczę, zaćmienia satelitów zanurzających się w cieniu planety lub cienie satelitów na jej powierzchni.