Komputer ENIAC, 1946,
University of Pennsylvania

Liczby rzeczywiste są na ogół zapamiętywane w komputerach w tzw. notacji zmiennopozycyjnej, tzn. jako $s \times k \times 2^c$, gdzie s jest znakiem ($+1$ lub -1), k jest mantysą z przedziału $[0{,}5, 1)$, a c — cechą (zero jest traktowane jako szczególny przypadek i jest zapisywane inaczej). Do zapamiętania k i c przeznacza się ustaloną liczbę bitów. Zwiększenie długości k zwiększa dokładność zapamiętywania (liczbę cyfr znaczących), a zwiększenie długości c — powiększenie zakresu reprezentowalnych liczb. Dodatkowo jeden bit trzeba przeznaczyć na zapamiętanie znaku całej liczby, a jeden bit cechy określa jej znak. Najkrótsze liczby zmiennopozycyjne mają 32 bity, z tego cecha ma 8 bitów, a mantysa — 23 (plus znak). Pozwala to na zapisanie liczb o wartości bezwzględnej z przedziału $(10^{-38}, 10^{38})$ z dokładnością do 7 cyfr znaczących (dziesiętnie). Na ogół taki zakres wystarcza, natomiast dokładność — nie, a więc stosuje się tzw. zapis podwójnej dokładności na 64 bitach, z 55-bitową mantysą. Zakres pozostaje bez zmian, natomiast dokładność zwiększa się do 16 cyfr dziesiętnych. Wiele obliczeń w wewnętrznych rejestrach komputera jest wykonywanych z jeszcze większą precyzją (22 cyfry). Okazuje się jednak, że w rozmaitych obliczeniach (głównie fizycznych) potrzebny jest większy zakres liczb. Niektóre komputery pozwalają więc 64-bitowe słowo podzielić inaczej — na 11-bitową cechę i 52-bitową mantysę. Zakres rośnie wówczas oszałamiająco do $(10^{-308}, 10^{308})$, natomiast dokładność maleje do 15 cyfr. Wreszcie dla fanatyków rozmiaru i dokładności istnieje format poczwórnej precyzji: 128 bitów, 15-bitowa cecha i 112-bitowa mantysa. Zakres — $(10^{-4932}, 10^{4932})$, a dokładność — 33 cyfry dziesiętne. Dla laika są to ogromne wartości, ale na pewno są profesjonaliści, którym ten zakres i dokładność nie wystarczają!

Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 481. Dane są liczby $a, b > 0$. Utwórzmy ciągi (a_n) i (b_n) w następujący sposób:

$$a_0 = a, \quad b_0 = b; \quad a_n = \frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}, \quad b_n = \frac{2}{\dfrac{1}{a_{n-1}} + \dfrac{1}{b_{n-1}}} \quad \text{dla } n \geqslant 1.$$

Udowodnić, że oba ciągi są zbieżne i znaleźć ich granice.
Rozwiązanie na str. 7

M 482. Mamy siedem odcinków o długościach zawartych w przedziale $[1, 10]$. Udowodnić, że wśród nich są takie trzy, które mogą być bokami pewnego trójkąta. Wykazać, że liczby siedem nie da się zastąpić przez mniejszą.
Rozwiązanie na str. 7

M 483. Wybrano losowo i niezależnie cztery punkty x_1, x_2, x_3, x_4 na okręgu. Znaleźć prawdopodobieństwo tego, że łuki $x_1 x_2$ i $x_3 x_4$ przecinają się. (Zakładamy, że jest dany wyróżniony kierunek obiegu okręgu; zgodnie z nim określamy łuk — posuwając się w tym kierunku od początku do końca.)
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 228. Cylindryczny pojemnik o długości $2l$ z tłokiem o polu przekroju równym S (patrz rysunek) może poruszać się po poziomej płaszczyźnie ze współczynnikiem tarcia k. Na lewo od tłoka, który znajduje się w odległości l od krawędzi, znajduje się gaz o temperaturze T_0 i ciśnieniu p_0. Między nieruchomą ścianką a tłokiem znajduje się sprężyna o współczynniku sprężystości $\varkappa$. Ile razy trzeba zwiększyć temperaturę gazu z lewej strony tłoka, aby objętość tego gazu podwoiła się? Tarcie między tłokiem a pojemnikiem możemy zaniedbać. Masa pojemnika i tłoka jest równa m, a ciśnienie zewnętrzne równe jest p_0.
Rozwiązanie na str. 6

F 229. W poziomym, nieruchomym cylindrycznym pojemniku, który jest zamknięty tłokiem o masie m, znajduje się jeden mol gazu. Gaz ten jest podgrzewany, wskutek czego tłok porusza się jednostajnie z prędkością v. Jaką ilość ciepła dostarczono do gazu? Wewnętrzna energia jednego mola tego gazu wynosi $U = cT$. Pojemność cieplną pojemnika i tłoka oraz ciśnienie zewnętrzne możemy zaniedbać, a ciśnienie p wewnątrz pojemnika jest stałe.
Rozwiązanie na str. 6