Niewierni mężowie

Podobno na Atlantydzie panował matriarchat. Nie byłoby w tym jeszcze nic strasznego, gdyby nie to, że pewnego dnia królowa Henrietta I zebrała wszystkie swoje poddane na rynku Mamajorki — stolicy Atlantydy — i obwieściła im, co następuje:

„Wiadomo mi, że pośród waszych mężów znajdują się mężowie wiarołomni. Wiem również, że każda żona wie o zdradach wszystkich pozostałych mężów, ale żadna żona nie wie, czy własny mąż ją zdradza. Zakazuję wam rozmawiać na te tematy między sobą. Rozkazuję natomiast, abyście zastrzeliły swojego męża o północy pierwszej nocy po tym, kiedy zorientujecie się, że was zdradza".

Trzydzieści dziewięć spokojnych nocy minęło po pamiętnym zebraniu, a o północy czterdziestej nocy rozległy się strzały. Powstają pytania: ilu mężczyzn zostało pozbawionych życia, czy wszyscy z nich byli wiarołomni i czy którykolwiek wiarołomny mąż przeżył?

Uzupełnijmy może informacje o Atlantydzie. Po pierwsze więc, wszystkie poddane były bezwzględnie posłuszne królowej. Po drugie, królowe były prawdomówne. Po trzecie, każda poddana była znakomitym logikiem i po czwarte, każdy wystrzał był powszechnie słyszany.

Mając te informacje możemy już wywnioskować, że na wyspie było czterdziestu wiarołomnych mężów i wszyscy oni zginęli owej czterdziestej nocy. Ogólnie rzecz biorąc, gdyby przy tych założeniach minęło n cichych nocy, to następnej nocy zginie wszystkich $n+1$ wiarołomnych mężów i nikt ponadto. Można to łatwo wykazać przez indukcję. My na razie sprawdzimy tylko przypadek jednego i dwóch wiarołomnych mężów. W przypadku, kiedy na wyspie znajdował się tylko jeden wiarołomny mąż, to jego żona, która, zgodnie z założeniami, nie wiedziała jeszcze przed zebraniem o żadnym wiarołomnym mężu, a od królowej dowiedziała się o istnieniu wiarołomstwa na wyspie, zastrzeliłaby swojego męża o północy od razu pierwszej nocy po tamtym zebraniu. Przy dwóch wiarołomnych mężach obie zdradzane żony wiedzą o jednym wiarołomnym mężu, a wszystkie pozostałe kobiety — o dwóch. Obie te panie kładą się spokojnie do łóżka pierwszej nocy i każda z nich spodziewa się, przy założeniu wierności swojego męża, usłyszeć strzał tej drugiej. Nie doczekawszy się go mogą obie ze spokojnym sumieniem pozbawić życia obu swych małżonków już następnej nocy.

Ogólnie rzecz biorąc każda żona powinna rozumować tak: „Tylko dwie liczby wiarołomnych mężów są znane wszystkim żonom. Skoro ja wiem o k wiarołomnych mężach, to albo mój chłop jest w porządku i wtedy każda ze zdradzanych żon, o których wiem, wie o $k-1$ wiarołomnych mężach i zastrzeli swojego męża k-tej nocy, albo mój mąż mnie zdradza i wtedy każda zdradzana żona wie też o k mężach, a pozostałe o $k+1$ i ja zastrzelę swojego męża $(k+1)$-ej nocy, podobnie jak i te, o których wiem, że są zdradzane".

Zauważmy, że Henrietta I mogła przy tym wszystkim oszczędzić swoim poddanym rozkoszy łamania głowy i zamiast zawiłej instrukcji ułożyć im prosty program działań: „jeżeli wiesz o k wiarołomnych mężach i nie nastąpią strzały k-tej nocy, to zastrzel swego męża $(k+1)$-ej nocy".

Jej następczyni, Henrietta II po paru latach próbowała powtórzyć sukces swojej matki i zorientowawszy się, że wiarołomstwo znów się rozpleniło, chciała skorzystać z jej pomysłu. Jednocześnie, pragnąc ulżyć swoim poddanym, zamiast zbierać je wszystkie na rynku, wprowadziła pocztę. Pierwszy jej list, rozesłany do wszystkich poddanek, zawiadamiał je o tym i informował jednocześnie, że każdy list wysłany na wyspie dotrze w skończonym czasie do adresata. Drugi list rozesłany przez nią, był kopią słynnego przemówienia jej matki. No cóż ... w efekcie żadne strzały nie padły i wszyscy wiarołomni mężowie grzeszyli dalej do woli. Henrietta II popełniła okropny błąd. Nie potrafiła bowiem zsynchronizować momentu otrzymania wiadomości przez swoje poddane i w rezultacie żadna z nich nie była pewna, czy brak strzałów k-tej nocy po otrzymaniu listu (gdzie k było liczbą wiarołomnych mężów) był spowodowany wiarołomstwem jej męża, czy też po prostu nieotrzymaniem listu we właściwym momencie przez pozostałe kobiety (wiarołomnych mężów było bowiem więcej niż jeden). Na szczęście, nie mając pewności, żadna z poddanych nie pociągnęła za spust „swojej" $(k+1)$-ej nocy.

Henrietta III próbowała naprawić błąd swojej matki. Przede wszystkim ulepszyła system pocztowy tak, że listy dochodziły albo tego samego, albo następnego dnia po wysłaniu. Poinformowała o tym swoje poddane w pierwszym liście i parę dni potem rozesłała kopię przemówienia swojej babki.

Zmarła później w opinii bardzo niesprawiedliwej, choć nieco skuteczniejszej królowej niż jej matka. Łatwo sprawdzić, że jeśli listy do zdradzanych żon dotarły w różnych terminach, to te, które otrzymały list w dniu jego wysłania, zastrzeliły swoich mężów, a te, które dostały list dnia następnego, nie zastrzeliły.

Rozwiązanie zadania F 229. Na podstawie pierwszej zasady termodynamiki ilość ciepła zamieniająca się na wzrost energii wewnętrznej gazu podczas jego ogrzania o ΔT i pracę W jest równa $Q = \Delta U + W$, gdzie $\Delta U = c\Delta T$. W naszym przypadku praca W, którą wykonuje gaz rozszerzając się, jest równa energii kinetycznej $mv^2/2 = p\Delta V$ (co wynika z zasady zachowania energii). Wtedy z równania stanu gazu doskonałego mamy $p\Delta V = \mathrm{R}\Delta T$, co daje

$$Q = c\Delta T + p\Delta V = c\Delta T + \mathrm{R}\Delta T = (c+\mathrm{R})\Delta T.$$

Otrzymujemy stąd

$$\Delta T = \frac{Q}{(c+\mathrm{R})} \text{ i } Q = \frac{Qc}{c+\mathrm{R}} + mv^2/2,$$

co pozwala napisać końcowy wynik:

$$Q = \frac{mv^2}{2}\left(1+\frac{c}{\mathrm{R}}\right).$$

Rozwiązanie zadania F 228. Rozpatrzmy przypadki 1) $kmg > \varkappa l$ i 2) $kmg < \varkappa l$.

1) Jeśli pojemnik nie porusza się, to wtedy $(p-p_0)S = \varkappa l$ i na podstawie równania stanu gazu doskonałego $p\frac{2Sl}{T} = p_0\frac{Sl}{T_0}$. Stąd znajdujemy, że $\frac{T}{T_0} = 2(1+\varkappa l/pS)$.

2) Pojemnik pozostaje w spoczynku do momentu osiągnięcia maksymalnej wartości siły wywieranej przez gaz na tłok równoważącej siłę tarcia spoczynkowego. Znajdziemy teraz odpowiadającą temu momentowi temperaturę T'. Jeśli deformację sprężyny oznaczymy $x = kmg/\varkappa$, to na podstawie warunku równowagi i równania stanu gazu możemy napisać

$$p-p_0 = kmg/S, \quad \frac{pS(l+x)}{T'} = p_0\frac{Sl}{T_0},$$

stąd

$$T' = \left(1+\frac{kmg}{p_0S}\right)\left(1+\frac{kmg}{\varkappa l}\right)T_0.$$

Od momentu rozpoczęcia się ruchu pojemnika proces zwiększania objętości zachodzi przy stałym ciśnieniu:

$$\frac{T}{T'} = \frac{V}{V'} = \frac{2Sl}{(l+x)S} = \frac{2}{1+kmg/\varkappa l}.$$

Podstawiając do tego wyrażenia otrzymaną wyżej wartość T' otrzymujemy

$$T = 2T_0\left(1+\frac{kgm}{p_0S}\right).$$

Co ciekawsze, gdyby Henrietta III pomyślała trochę i rozkazała wstrzymać się ze strzelaniem przez dwie noce, to osiągnęłaby rezultaty swojej babki. Gorąco polecam sprawdzić ten fakt.

Zanim przejdziemy do genialnej Margarety, córki Henrietty III, zatrzymajmy się na chwilę i zróbmy dygresję.

Załóżmy, że w systemie informatycznym działa równolegle n procesorów, każdy wykonując swój program. Załóżmy również, że każdy z n programów składa się z jednej, być może skomplikowanej pętli, której kolejne wykonania muszą być zsynchronizowane z kolejnymi wykonaniami pętli w pozostałych programach. Synchronizacja polegać ma na tym, że po wykonaniu k-tego obrotu pętli nie wolno nam zacząć wykonywać $k+1$ obrotu, dopóki nie nabierzemy pewności, że pozostałe procesory zakończyły już k-ty obrót.

Cały problem polega na tym, jak zorganizować przepływ informacji, aby ta zasada była spełniona. Utrudnieniem dodatkowym niech będzie to, że jedynym miejscem w pamięci, do którego mają dostęp wszystkie procesory, jest jeden jedyny bit, do którego mogą wszyscy zaglądać i w razie potrzeby nadawać mu wartość 0 lub 1. Załóżmy jeszcze, że istnieje wspólny ,,kalendarz", czyli że wszystkie procesory zaczynają działanie jednocześnie w chwili zero i działają następnie w takt ,,metronomu" tak, że tylko różne długości pojedynczego obrotu pętli w procesorach powodują problemy synchronizacyjne.

Ciekawe, że sytuacja nasza niezwykle przypomina ponurą rzeczywistość Atlantydy. Gdyby spytać w dowolnej chwili każdy z procesorów, który to krok pętli został ostatnio u niego zakończony, to odpowiedzi mogłyby być co najwyżej dwie: k bądź $k+1$ dla pewnego k. Można zatem zastosować coś, co bardzo przypomina niezwykłe pomysły Henrietty I. Wystartować w chwili zero, synchronizując lokalne zegary procesorów (zebranie na rynku) i założyć, że, dajmy na to, co sto taktów procesory umawiają się na kolejną sesję synchronizacyjną. Każda sesja będzie wyglądać mniej więcej tak: zerujemy bit wspólny i kolejne takty zegarów zaczynają nam odliczać na przemian ,,dni i noce". Jeżeli od początku sesji minie k nocy i k-tego dnia procesor, który jest po zakończeniu k-tego obrotu swojej pętli, widzi w bicie synchronizacyjnym zero, to $k+1$ nocy ,,strzela", czyli pakuje jedynkę do tego bitu (zauważmy tutaj, że liczba strzałów k-tej nocy nie była w ogóle istotna). Może po tym kontynuować lub zacząć wykonywanie $k+1$ obrotu, gdyż wie, że pozostałe procesory mają już zakończone co najmniej k obrotów (gdyby były takie, które by miały $k-1$, to jedynka pojawiłaby się w bicie już k-tego dnia i wtedy naszemu procesorowi nie wolno byłoby zacząć $k+1$ obrotu i musiałby czekać do następnej sesji).

Zauważmy jednak, że nasz algorytm, jakkolwiek poprawny, staje się coraz gorszy w miarę upływu czasu i wraz ze wzrostem k rośnie czas potrzebny na wykonanie sesji synchronizacyjnej. Królowa Margareta znalazła sposób, jak sobie z tym poradzić. Oto jej algorytm:

(a) każda żona, która wie o k_0 wiarołomnych mężach, gdzie $k_0 \equiv 0 \pmod 3$, strzela o północy pierwszej nocy. Jeżeli $k_0 = 0$, to strzela do męża, a jeśli $k_0 > 0$, to strzela w powietrze!
(b_0) jeżeli nie było strzałów pierwszej nocy, to każda żona wiedząca o k_1 wiarołomnych mężach, gdzie $k_1 \equiv 1 \pmod 3$, powinna zastrzelić swego męża drugiej nocy.
(b_1) jeżeli były strzały pierwszej nocy, to każda żona, wiedząca o k_2 wiarołomnych mężach, gdzie $k_2 \equiv 2 \pmod 3$, powinna zastrzelić swego męża drugiej nocy.
(c_0) jeżeli dwie pierwsze noce były ciche, to każda żona strzela do swego męża trzeciej nocy.
(c_1) jeżeli były strzały pierwszej nocy i nie było ich drugiej, to pierwszonocne strzelczynie strzelają do mężów trzeciej nocy (jeżeli jeszcze jest do kogo strzelać).

Powyższy protokół pozwala rozwiązać problem wiarołomstwa w sposób ostateczny w ciągu trzech nocy! Niezależnie od liczby żon i liczby wiarołomnych mężów. Można to łatwo sprawdzić badając wszystkie trzy przypadki $k = 0, 1, 2 \pmod 3$, gdzie k jest liczbą wiarołomnych mężów.

Dzięki temu pomysłowi Margareta przeszła do historii w chwale. Jaki morał płynie z tych wydarzeń? Po pierwsze, że równoległość stwarza czasami niespodziewane problemy. Po drugie, że synchronizacja działań jest często trudna, o czym świadczą przypadki Henrietty II i III. Po trzecie, że można synchronizować procesy, nie używając pojęcia wspólnego czasu, o czym świadczy ulepszony algorytm Henrietty III (z odczekaniem jednego dnia). Warunkiem musi być jednak ograniczenie czasu przesyłki komunikatów (w tym przypadku — komunikatu o rozpoczęciu sesji, wysyłanego przez jednostkę sterującą), w przeciwnym razie nie unikniemy niepowodzeń Henrietty II. Można wykazać, że jeśli komunikaty docierają co najwyżej po b dniach, to wstrzymanie się ze strzałem przez $(b+1)$ dni pozwoli na dobrą synchronizację.

Na koniec wreszcie, po czwarte, że jeżeli się chce przejść do historii w chwale, to nie należy zadowalać się słabymi rozwiązaniami, nawet jeśli są poprawne.

Opracował mgr Piotr CHRZĄSTOWSKI

Rozwiązanie zadania M 481. Zauważmy, że z nierówności dla średniej arytmetycznej i harmonicznej wynika, że oba ciągi są monotoniczne dla $n \geqslant 1$. Ponieważ są ograniczone, są zbieżne. Ponadto mają tę samą granicę:

$$|a_n - b_n| = \left|\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2} - \frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a_{n-1}+b_{n-1})^2 - 4a_{n-1}b_{n-1}}{2(a_{n-1}+b_{n-1})}\right| =$$

$$= \frac{(a_{n-1}-b_{n-1})^2}{2(a_{n-1}+b_{n-1})} \leqslant \frac{1}{2}|a_{n-1}-b_{n-1}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n-1}}|a_1 - b_1|.$$

Zauważmy jeszcze, że

$$a_n b_n = (a_{n-1}+b_{n-1})\frac{a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}} a_{n-1}b_{n-1}.$$

Wobec tego $a_n b_n \to g^2$, skąd $g = \sqrt{ab}$.

Rozwiązanie zadania M 482. Nietrudno zobaczyć, że spośród odcinków o długościach 1, 1, 2, 3, 5, 8 nie da się wybrać trzech, z których dałby się ułożyć trójkąt. Przypuśćmy teraz, że mamy siedem odcinków o długościach $1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_7 \leqslant 10$. Rozpatrzmy odcinki o długościach $a_k \leqslant a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$. Jeśli nie dałoby się z nich ułożyć trójkąta, to musiałoby być $a_k + a_{k+1} \leqslant a_{k+2}$. Zatem $a_1 \geqslant 1$, $a_2 \geqslant 1$, $a_3 \geqslant 2, \ldots, a_7 \geqslant 13$ — sprzeczność.

Rozwiązanie zadania M 483. Można obejść się bez rachunków (prawie). Ustalając x_1 widzimy, że dwie z sześciu możliwych permutacji pozostałych punktów dają przecięcie. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{1}{3}$.